

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

E. LENGART

Inégalité de semimartingale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 77-80

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_77_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Nous considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \underline{F}, \underline{F}_t, P)$ vérifiant les conditions habituelles et F une fonction convexe modérée (croissante, nulle en 0), d'exposant p ($p = \sup_x \frac{xf(x)}{F(x)}$, où f est la dérivée droite de F).

L'espace des v.a. x telles que $\|x\|_F = \inf\{c > 0 ; E(F(|x|/c)) \leq 1\}$ soit fini est désigné par L^F , et c'est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_F$. La fonction F étant modérée, une v.a. x appartient à L^F ssi $F(|x|)$ est intégrable. Nous appelons $\underline{M}^F(P)$ (resp. $\underline{A}^F(P)$, $\underline{V}^F(P)$) l'espace des P -martingales M telles que M_∞^* appartienne à L^F (resp. des processus adaptés à variation finie, prévisibles nuls en 0 pour $\underline{V}^F(P)$, tels que $\int_0^\infty |dA_s|$ appartienne à L^F). On désigne par $\underline{H}^F(P)$ l'espace des P -semimartingales égal à $\underline{M}^F(P) + \underline{A}^F(P) = \underline{M}^F(P) \oplus \underline{V}^F(P)$; on appelle $\underline{S}^F(P)$ l'espace des semimartingales X telles que X_∞^* appartienne à L^F .

Si X est une semimartingale spéciale, nous notons $\tilde{X}$ son "compensateur" prévisible, c'est à dire l'unique processus à variation finie, prévisible et nul en 0, tel que $X - \tilde{X}$ soit une martingale locale, que nous noterons $\tilde{X}^c$ et appellerons la compensée de X .

LEMME. Soit X une semimartingale spéciale. Si f_X est un processus prévisible à valeurs dans $\{-1, +1\}$ tel que $|d\tilde{X}| = f_X d\tilde{X}$, on a

$$\|\int_0^\infty |d\tilde{X}_s|\|_F \leq 2p \|\left(\int_0^\infty f_X dX\right)_\infty^*\|_F$$

DEMONSTRATION.

a) Si X est une sous martingale spéciale (i.e. $f_X = 1$). Par arrêt, on peut supposer que X est de la classe (D). On a alors, pour tout t.a. T

$$E(\tilde{X}_\infty - \tilde{X}_T) = E(X_\infty - X_T) \leq E(2X_\infty^* I_{\{T < \infty\}})$$

et on conclut par le lemme de Garsia-Neveu.

b) Cas général. La semimartingale $\int f_X dX$ admet pour compensateur prévisible le processus croissant $\int f_X d\tilde{X} = \int |d\tilde{X}|$ et est donc une sous-martingale locale; on est ramené au point a).

De cette inégalité, nous pouvons déduire une généralisation des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy aux semimartingales. Si X est une semimartingale, nous notons $\|X\|_{\underline{H}^F}$ le nombre $+\infty$ si X n'est pas spéciale et $\|[\tilde{X}^c, \tilde{X}^c]_\infty\|_F + \|\int_0^\infty |d\tilde{X}_s|\|_F$ si X est spéciale; nous notons $\|X_\infty^*\|_F$ par $\|X\|_{\underline{S}^F}$. Enfin, nous notons par $p^F(X)$ le nombre $\sup\{\|\int f dX\|_{\underline{S}^F} ; f \text{ prév.}, |f| \leq 1\}$.

THEOREME 1. Il existe deux constantes universelles $0 < c_F < c_F' < \infty$ telles que, pour toute semimartingale X , on ait

$$c_F \|X\|_{\underline{H}^F} \leq \| \int X dX \|_{\underline{S}^F} \leq p^F(X) \leq c_F' \|X\|_{\underline{H}^F}$$

DEMONSTRATION. On peut encore supposer que X est une sous martingale locale (i.e. $f_X = 1$) car $\| \int f_X dX \|_{\underline{H}^F} = \|X\|_{\underline{H}^F}$ et $p^F(\int f_X dX) = p^F(X)$.

$$\begin{aligned} a) \|X\|_{\underline{H}^F} &\leq \| [\tilde{X}, \tilde{X}]_{\infty}^{\frac{1}{2}} \|_F + \| \tilde{X}_{\infty} \|_F \leq a_F \| \tilde{X} \|_{\underline{S}^F} + \| \tilde{X}_{\infty} \|_F \quad (B-D-G) \\ &\leq a_F \|X\|_{\underline{S}^F} + (a_F + 1) \| \tilde{X}_{\infty} \|_F \leq (a_F + 2p(a_F + 1)) \|X\|_{\underline{S}^F} \quad (\text{lemme}). \end{aligned}$$

b) si f est prévisible, borné par 1:

$$\begin{aligned} \| \int f dX \|_{\underline{S}^F} &\leq \| \int f d\tilde{X} \|_{\underline{S}^F} + \| \tilde{X}_{\infty} \|_F \leq b_F \| [\int f d\tilde{X}, \int f d\tilde{X}]_{\infty}^{\frac{1}{2}} \|_F + \| \tilde{X}_{\infty} \|_F \quad (B-D-G) \\ &\leq (b_F + 1) \|X\|_{\underline{H}^F}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. Si X est une sous martingale locale, on a

$$c_F \|X\|_{\underline{H}^F} \leq \|X\|_{\underline{S}^F} \leq c_F' \|X\|_{\underline{H}^F}$$

COROLLAIRE 2. Si on pose, pour X semimartingale, $q^F(X) = \sup \| \int I_A dX \|_{\underline{S}^F}$ où A décrit les ensembles prévisibles, les normes $\| \cdot \|_{\underline{H}^F}$, p^F et q^F sont équivalentes.

REMARQUE. Yor a prouvé dans 4 l'inégalité suivante, à l'aide du lemme de Kinshin. Posons $N_F(X) = \sup \| \int_0^{\infty} f dX \|_F$ où f décrit les processus prévisibles élémentaires de la forme $a_0 I_{\{0\}} + \sum a_i I_{[t_i, t_{i+1}]}$ avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ et a_i est $\mathbb{F}_{t_i}$ mesurable bornée par 1. Les normes $\| \cdot \|_{\underline{H}^F}$ et N_F sont équivalentes.

COROLLAIRE 3. Si Q est une probabilité absolument continue par rapport à P , de densité bornée, $H^F(P)$ est inclus dans $H^F(Q)$, avec une norme plus forte.

C'est évident en comparant les normes p_P^F et p_Q^F .

Nous allons maintenant démontrer une inégalité due à Stein dans le cas discret et pour $F(x) = x^p (p > 1)$, à Lepingle[1] dans le cas $F(x) = x$ et en temps continu, et à Yor dans le cas général[5]. Ce théorème est démontré, dans les articles précités, par des techniques de dualité, plus "savantes", mais qui donnent de meilleures constantes.

THEOREME 2. Il existe une constante $c_F' < \infty$ telle que pour toute semimartingale spéciale X on ait $\| [\tilde{X}, \tilde{X}]_{\infty}^{\frac{1}{2}} \|_F \leq c_F' \| [X, X]_{\infty}^{\frac{1}{2}} \|_F$.

DEMONSTRATION; a) Si $F(x) = x^2$, c'est bien connu et facile (Stricker [2]): on a $E([\tilde{X}, \tilde{X}]_{\infty}) \leq E([X, X]_{\infty})$.

b) Si X est à sauts prévisiblement bornés par un processus croissant prévisible D , on a, pour tout t.a. T , $E([\tilde{X}, \tilde{X}]_T I_{\{T>0\}}) \leq E([X, X]_T I_{\{T>0\}})$

$E(([\tilde{X}, \tilde{X}]_T + D_T) I_{\{T>0\}})$. En appliquant un lemme sur les fonctions concave [6], on obtient $E([\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq 2 E([X, X]_\infty^{\frac{1}{2}} + D_\infty)$.

c) Si $F(x) = x$, on obtient le résultat à l'aide d'une sorte de décomposition de Davis, mais plus simple: on peut supposer que X_∞^* est intégrable; posons $S_t = \sup_{s \leq t} |\Delta X_s|$ et $K_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| \geq 2 S_{s-}\}}$. Le processus K a sa variation totale majorée par $2S_\infty$ elle-même majorée par $2[X, X]_\infty^{\frac{1}{2}}$. On a alors $X = Y + K$ et $|\Delta Y| \leq 2S_-$, et les inégalités

$$E([\tilde{Y}, \tilde{Y}]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq 2E([Y, Y]_\infty^{\frac{1}{2}} + 2S_\infty) \leq 2E([K, K]_\infty^{\frac{1}{2}} + 3[X, X]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq 10E([X, X]_\infty^{\frac{1}{2}})$$

$$E([\tilde{K}, \tilde{K}]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq E(\int_0^\infty |d\tilde{K}_s|) \leq E(\int_0^\infty |dK_s|) \leq 2E([X, X]_\infty^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{d'où l'on déduit } E([\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq 12E([X, X]_\infty^{\frac{1}{2}})$$

d) cas général. Considérant la semimartingale par rapport à $(\underline{F}_{T+t})$

${}^T X = (X_{T+t} - X_T) I_{\{T < \infty\}}$ (T étant un t.a.), on obtient

$$E([\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}} - [\tilde{X}, \tilde{X}]_T^{\frac{1}{2}}) \leq E(([\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty - [\tilde{X}, \tilde{X}]_T)^{\frac{1}{2}}) \leq 12E([{}^T X, {}^T X]_\infty^{\frac{1}{2}})$$

$$\leq 12E([X, X]_\infty^{\frac{1}{2}} I_{\{T < \infty\}})$$

En appliquant le lemme de Garsia-Neveu, on a alors

$$\|[\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F \leq 12p \| [X, X]_\infty^{\frac{1}{2}} \|_F.$$

COROLLAIRE 1. Sous les mêmes hypothèses, on a $\|[\tilde{X}, \tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F \leq (c_F^{\frac{1}{2}} + 1) \| [X, X]_\infty^{\frac{1}{2}} \|_F$

COROLLAIRE 2. Soient $X \in \underline{H}^F(\underline{F}, P)$, Q une probabilité absolument continue par rapport à P , de densité bornée, et $\underline{G}$ une autre filtration.

Si X est une $(\underline{G}, Q)$ -semimartingale, alors sa $(\underline{G}, Q)$ -compensée appartient à $\underline{H}^F(\underline{G}, Q)$ et X appartient à $\underline{H}_{loc}^F(\underline{G}, Q)$.

DEMONSTRATION. Si X appartient à $\underline{H}^F(\underline{F}, P)$, $[X, X]_\infty^{\frac{1}{2}}$ appartient à $L^F(P)$ et donc à $L^F(Q)$; le résultat se déduit alors du corollaire 1.

La semimartingale X est alors dans $\underline{H}_{loc}^F(\underline{G}, Q)$ car tout processus prévisible à variation finie est localement borné.

REMARQUE. Si $\underline{G} \subset \underline{F}$ et X est $\underline{G}$ -adaptée, X appartient à $\underline{H}^F(\underline{G}, Q)$ si elle appartient à $\underline{H}^F(\underline{F}, P)$, car il est clair que $P_{(\underline{G}, Q)}^F \leq P_{(\underline{F}, Q)}^F \leq c P_{(\underline{F}, P)}^F$

UNE REMARQUE SUR LES CHANGEMENTS DE PROBABILITE.

Dellacherie a montré que si X est une semimartingale, il existe une probabilité Q équivalente à P , de densité bornée, telle que, pour tout t , X^t appartienne à $\underline{M}^2(Q) \oplus \underline{V}^1(Q)$. Nous allons voir que les théorèmes

1 et 2 entraînent un résultat plus fort, démontré par Bichteler dans le cas $p=2$, et par Dellacherie (communication personnelle) dans le cas général.

THEOREME 3. Soit (X^n) une suite de semimartingales. Il existe une probabilité Q équivalente à P , de densité bornée, telle que, pour tout t et tout n , X^n arrêtée en t appartienne à $\bigcap_p \underline{H}^p(Q) \cap \underline{H}^F(Q)$.

DEMONSTRATION. Nous traitons, pour des simplifications de notations, le cas d'une seule semimartingale X , l'argument étant essentiellement le même pour une suite. Rappelons un lemme dû à Dellacherie, et qui résulte simplement du lemme de Borel-Cantelli: si (z_n) est une suite de v.a. p.s. finies, il existe une probabilité Q équivalente à P , de densité bornée, telle que, pour tout n , z_n est Q -intégrable.

Soit Q_1 une probabilité équivalente à P , de densité bornée, telle que pour tout p et tout t , $[X, X]_t^p$ et $F([X, X]_t^{\frac{1}{2}})$ soient Q_1 -intégrables. La semimartingale X est alors Q_1 -spéciale et, d'après le théorème 2, pour tout t , sa Q_1 -compensée M appartient à $\bigcap_p \underline{H}^p(Q_1) \cap \underline{H}^F(Q_1)$. Si A est le Q_1 -compensateur prévisible de X , on peut trouver une probabilité Q équivalente à Q_1 , de densité bornée, telle que pour tout p et t $(\int_0^t |dA_s|)^p$ et $F(\int_0^t |dA_s|)$ soient Q -intégrables; alors, pour tout t , A^t appartient à $\bigcap_p \underline{H}^p(Q) \cap \underline{H}^F(Q)$ et, d'après le corollaire 3 du théorème 1, il en va de même pour M^t et donc pour X^t .

REFERENCES.

- 1 D. LEPINGLE. Une inégalité de martingale. Sémin. de Proba. XIII
- 2 C. STRICKER. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. Z.f.W. 39, 1977.
- 3 M. YOR. Les inégalités de sous martingales comme conséquence de la relation de domination. Stochastics, Vol 3, 1979.
- 4 M. YOR. Quelques interactions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques. Sémin. de théorie du Potentiel IV, lect. notes in Math. n° 713, 1979.
- 5 M. YOR. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Sémin. de Proba. XIII.
- 6 E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sémin. de Proba. XIV.

Erik LENGLART

Université de Rouen

Département de Mathématiques

76 130 Mont Saint Aignan.