

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

L. GALLARDO

Au sujet du contenu probabiliste d'un lemme d'Henri Poincaré

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 185-190

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_185_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_185_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AU SUJET DU CONTENU PROBABILISTE
D'UN LEMME D'HENRI POINCARÉ

L. GALLARDO

Université de Nancy I

Dans un article de 1975 (cf [1]), C. Borell utilise de manière cruciale le lemme suivant de H. Poincaré :

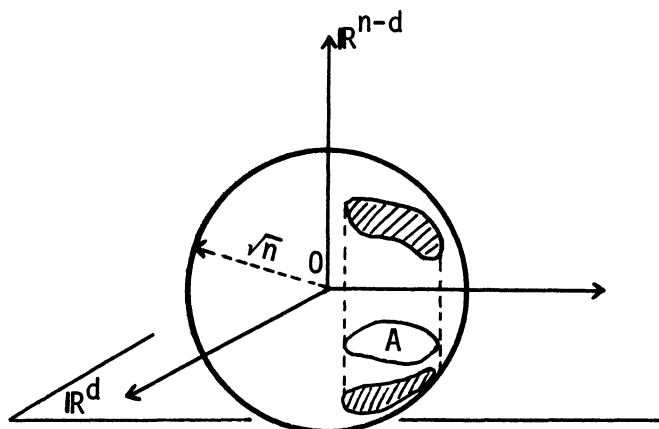
Lemme. -

Soit d un entier ≥ 1 fixé et soit n un entier $> d$. On note π_n la projection $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\sigma_n^{\sqrt{n}}$ la mesure superficielle (normalisée) de la sphère $S_{\sqrt{n}}^{n-1}$ de centre l'origine et de rayon $\sqrt{n}$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^{\sqrt{n}}(\pi_n^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{n}}^{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^d$.

En d'autres termes, l'aire normalisée, hachurée sur la figure ci-dessous, converge vers la mesure gaussienne du borélien A de $\mathbb{R}^d$ quand n tend vers l'infini.



L'importance de ce résultat dans diverses questions avait été révélée par H.P. Mc Kean (cf [4] et les références s'y trouvant) mais à ma connaissance on ne s'était pas encore jusqu'à présent intéressé à ce lemme pour lui-même. Pourtant l'intervention de la mesure gaussienne est assez inattendue. Ceci nous a incité à penser que ce résultat (démontré de façon purement analytique dans [3]) était de nature probabiliste. Dans ce qui suit nous montrons en effet que le lemme de H. Poincaré est lié à une curieuse propriété asymptotique du temps de sortie d'une boule pour le mouvement brownien.

Théorème.-

Soit $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t), \dots$ une suite de mouvements browniens linéaires, indépendants et issus de zéro. Soit $(r_n)_{n>0}$ une suite de nombres positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2/n = 1$. Soit τ_n l'instant de sortie de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r_n dans $\mathbb{R}^n$ pour le mouvement brownien $(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$. Alors τ_n converge en probabilité vers 1 quand n tend vers l'infini.

Démonstration : Notons d'abord, pour justifier les calculs qui vont suivre, que τ_n a des moments de tous les ordres (cf. par exemple [2] page 44).

D'après la formule de Itô on a pour tout $t > 0$:

$$(1) \quad \beta_1^2(t) + \dots + \beta_n^2(t) = 2M_t + nt,$$

où $M_t = \int_0^t \beta_1 d\beta_1 + \dots + \int_0^t \beta_n d\beta_n$ est une martingale. En faisant $t = \tau_n$ dans la relation (1), on a

$$(2) \quad r_n^2 = 2M_{\tau_n} + n\tau_n$$

et en prenant l'espérance des deux membres de (2), on obtient

$$(3) \quad E(\tau_n) = \frac{r_n^2}{n},$$

puisque $E(M_{\tau_n}) = E(M_0) = 0$. On a ainsi

$$(4) \quad \text{Var}(\tau_n) = E(\tau_n^2) - \frac{r_n^4}{n^2} = 4 \frac{E(M_{\tau_n}^2)}{n^2},$$

d'après la relation (2). Or comme $E(\tau_n) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$, il

reste à voir que $\frac{E(M_{\tau_n}^2)}{n^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On a

$$(5) \quad \begin{aligned} M_t^2 &= \left(\int_0^t \beta_1 d\beta_1 + \dots + \int_0^t \beta_n d\beta_n \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \beta_i d\beta_i \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\int_0^t \beta_i d\beta_i \right) \left(\int_0^t \beta_j d\beta_j \right). \end{aligned}$$

La deuxième somme de (5) est une martingale puisque pour $i \neq j$, β_i et β_j sont indépendants. De plus il est facile de voir que pour tout i , $\int_0^t \beta_i^2(s) ds$ est le processus croissant associé à la semi-martingale $\left(\int_0^t \beta_i d\beta_i \right)^2$. Autrement dit, pour tout i ,

$$(6) \quad \left(\int_0^t \beta_i d\beta_i \right)^2 - \int_0^t \beta_i^2(s) ds \text{ est une martingale.}$$

Il en résulte que $M_t^2 - \int_0^t (\beta_1^2(s) + \dots + \beta_n^2(s)) ds$ est une martingale d'espérance nulle. Par le théorème d'arrêt de Doob on obtient donc :

$$(7) \quad E(M_{\tau_n}^2) = E \int_0^{\tau_n} (\beta_1^2(s) + \dots + \beta_n^2(s)) ds.$$

A partir de (7) on obtient alors immédiatement la majoration

$$(8) \quad E(M_{\tau_n}^2) \leq r_n^2 E(\tau_n) = \frac{r_n^4}{n}.$$

Ainsi $\frac{E(M_{\tau_n}^2)}{n^2} \leq \frac{r_n^4}{n^3} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire.-

Soit $d \geq 1$ un entier fixé. Sous les hypothèses du théorème, le vecteur aléatoire $(\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_d(\tau_n))$ converge en loi, quand $n \rightarrow +\infty$, vers une loi gaussienne centrée de covariance $K = \mathbb{I}_d$.

Démonstration : Il existe une sous suite d'entiers $n_i \rightarrow +\infty$, telle que $\tau_{n_i} \rightarrow 1$ presque sûrement quand $i \rightarrow +\infty$. Par continuité des trajectoires browniennes, on a donc pour tout entier k fixé :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \beta_k(\tau_{n_i}) = \beta_k(1) \text{ p.s.}$$

Ainsi $(\beta_1(\tau_{n_i}), \dots, \beta_d(\tau_{n_i}))$ converge presque sûrement (donc en loi), quand $i \rightarrow +\infty$, vers $(\beta_1(1), \dots, \beta_d(1))$.

Or il est facile de voir que la suite des lois de probabilité de $(\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_d(\tau_n))$ ($n \in \mathbb{N}$) n'a qu'une seule valeur d'adhérence (pour la convergence étroite) qui n'est autre que la loi de $(\beta_1(1), \dots, \beta_d(1))$ (pour le voir procéder par extraction de sous suites comme ci-dessus). D'après le théorème de Helly-Bray le corollaire est donc démontré.

Lien avec le lemme de H. Poincaré : D'après la continuité des trajectoires et l'invariance par rotation du mouvement brownien, le point $(\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_n(\tau_n))$ est uniformément distribué sur la sphère $S_{r_n}^{n-1}$. Il en résulte que la mesure $A \mapsto \sigma_n^{r_n}(\pi_n^{-1}(A) \cap S_{r_n}^{n-1})$ n'est autre que la loi de $(\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_d(\tau_n))$ qui converge vers la loi gaussienne centrée réduite quand $n \rightarrow +\infty$ d'après le corollaire.

Remarque 1 : Heuristiquement notre théorème dit que si n est très grand, le brownien $(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, issu de zéro, sort à peu près à l'instant 1 de la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$. A cet instant la composante sur $\mathbb{R}^d$ est, bien entendu, normalement distribuée.

Remarque 2 : Par notre corollaire nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P((\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_d(\tau_n)) \in A) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

pour tout borélien A ayant une frontière de mesure nulle. C'est un tout petit peu moins fort que le résultat du lemme de Poincaré. Cependant, par la méthode utilisée par A. Ehrhard dans [3], il est très facile d'obtenir la densité de probabilité du vecteur $(\beta_1(\tau_n), \dots, \beta_d(\tau_n))$; c'est (avec $r_n = \sqrt{n}$) la fonction à support compact suivante :

$$f_n(x_1, \dots, x_d) = 1_{\{x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq n\}} \cdot \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-d}{2})} n^{-\frac{d}{2}} \left(1 - \frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{n}\right)^{\frac{n-d-1}{2}},$$

et l'on voit immédiatement, compte tenu de l'inégalité classique

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \leq e^{-\alpha} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq n,$$

qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n > d$:

$$f_n(x_1, \dots, x_d) \leq C e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_d^2)}.$$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors le lemme de Poincaré pour tout borélien A .

Bibliographie :

- [1] BORELL C., The Brunn - Minkowski Inequality in Gauss Space ;
Inventiones math. N° 30 (1975) p. 207-216.
- [2] DYNKIN E.B., YUSHKEVICH A.A., Markov Processes ; Plenum
Press, New-York (1969).

- [3] EHRHARD A., L'inégalité de Borell ; Exposé à l'école d'été de Calcul des Probabilités de Saint-Flour 1980 (à paraître aux Annales Scientifiques de l'Université de Clermont).

- [4] MC KEAN H.P., Geometry of Differential Space ; Annals of Proba. Vol. 1 (1973) p. 197-206.

UER Sciences Mathématiques
ERA N° 839 du CNRS
Université de Nancy I, C.O. 140
54037 - NANCY CEDEX