ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J.-L. CHABERT

Polynômes à valeurs entières ainsi que leurs dérivées

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 68, série *Mathématiques*, n° 18 (1979), p. 47-64
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__68_18_47_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 47 - 64

POLYNOMES A VALEURS ENTIERES AINSI QUE LEURS DERIVEES

J.-L. CHABERT

Université de Toulouse le Mirail

§ 1. Introduction.

Etant donné un *anneau intègre* A *de corps des fractions* K, notons $A[X]_{sub}$ l'*anneau des polynômes à valeurs entières sur* A, $A[X]^{(k)}_{sub}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A ainsi que leurs k premières dérivées ($k \in \mathbb{N}$) et $A[X]^{(\infty)}_{sub}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire :

1.1. $\quad A[X]_{sub} = \{P(X) \in K[X] \mid P(a) \in A \text{ pour tout } a \in A\}.$

1.2. $\quad A[X]^{(k)}_{sub} = \{P(X) \in K[X] \mid P^{(h)}(X) \in A[X]_{sub} \text{ pour } 0 \leq h \leq k\}.$

1.3. $\quad A[X]^{(\infty)}_{sub} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A[X]^{(k)}_{sub}.$

On a alors les inclusions :

1.4. $A[X] \subset A[X]^{(\infty)}_{sub} \subset A[X]^{(k)}_{sub} \subset A[X]_{sub} \subset K[X]$.

Lorsque A est un anneau de valuation, on sait bien décrire le spectre de l'anneau $A[X]_{sub}$ (cf. [5]). Dans les Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, P.-J. Cahen [2] a généralisé cette description à l'anneau $A[X]^{(k)}_{sub}$ où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En fait, tout idéal premier de $A[X]^{(k)}_{sub}$ est au-dessous d'un idéal premier de $A[X]_{sub}$.

Ici, nous voulons généraliser ces résultats au cas où A est un anneau intègre noethérien quelconque. Notre méthode consiste à utiliser la détermination dans ce cas général du spectre de $A[X]_{sub}$ en fonction de celui de A (cf. [4]) et le fait que, pour tout idéal maximal m de A et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A_m[X]_{sub}$ est entier sur $A_m[X]^{(k)}_{sub}$.

§ 2. Préliminaires.

2.1. Localisation. On vérifie sans peine que les formules suivantes sont vraies pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sachant qu'elles le sont pour $k = 0$ (cf. [3]) :

a) $S^{-1}(A[X]^{(k)}_{sub}) \subset (S^{-1}A)[X]^{(k)}_{sub}$ pour toute partie multiplicative S de A

b) $S^{-1}(A[X]^{(k)}_{sub}) = (S^{-1}A)[X]^{(k)}_{sub}$ lorsque l'anneau A est noethérien

c) $A[X]^{(k)}_{sub} = \bigcap_{m \in \mathrm{Max}(A)} A_m[X]^{(k)}_{sub}$

d) $A_p[X]^{(k)}_{sub} = A_p[X]$ pour tout idéal premier p de A tel que A/p soit infini.

Si l'anneau A est de cardinal fini, alors c'est un corps et tous les anneaux considérés sont égaux à K [X] , il n'y a plus de problème. On supposera A de *cardinal infini.* Soit p un idéal premier de A. Pour trouver les idéaux premiers de $A[X]^{(k)}_{sub}$ au-dessus de p, il peut être intéressant de localiser en p. Si le quotient A/p est infini, la localisation marche bien : $(A[X]^{(k)}_{sub})_p = A_p[X]^{(k)}_{sub} = A_p[X]$ compte tenu de 2.1.d) et donc :

2.2. Les idéaux premiers de $A[X]^{(k)}_{sub}$ au-dessus d'un idéal premier p de A tel que A/p soit infini sont les intersections avec $A[X]^{(k)}_{sub}$ des idéaux premiers de $A_p[X]$ au-dessus de p et ceux-ci sont de la forme $pa_p[X]$ ou de la forme $(p, Q(X))A_p[X]$ où $Q(X) \in A_p[X]$ a une image dans $(A_p/pA_p)[X]$ irréductible.

En particulier, les idéaux premiers de $A[X]^{(k)}_{sub}$ au-dessus de l'idéal (o) de A sont l'idéal (o) et les idéaux de la forme :

$$P^{(k)}_Q = \{Q.R \in A[X]^{(k)}_{sub} \mid R \in K[X]\}$$ où Q(X) est un polynôme de K[X]

irréductible défini à un facteur multiplicatif, élément de K^*, près. Ces idéaux $P_Q^{(k)}$ sont tous de hauteur 1 et le localisé de $A[X]_{sub}^{(k)}$ correspondant est l'anneau $K[X]_{(Q)}$ de valuation Q-adique de K(X).

On s'intéressera donc au cas où A/p est fini et où donc, en particulier, p est maximal. Dans ce cas, il se peut que $(A[X]_{sub}^{(k)})_p$ soit strictement inclus dans $A_p[X]_{sub}^{(k)}$ (cf. [3]), on supposera donc A *noethérien*. On pourra alors localiser grâce à 2.1.b) et supposer A *local*. Aussi, désormais :

2.3. Notations. On notera A *un anneau intègre noethérien de corps des fractions* K *local d'idéal maximal* m *et de corps résiduel* A/m *de cardinal fini* $q = p^f$.

On notera aussi $\hat{A}$ *le complété de* A *pour la topologie* m*-adique,* A' *la clôture intégrale de* A *et* $\bar{A}$ *la fermeture intégrale de* A *dans une clôture algébrique de* K.

§ 3. **L'anneau** $A[X]_{sub}$.

Il s'agit principalement de rappeler des résultats déjà connus :

3.1. Proposition. [4] . *L'anneau* $A[X]_{sub}$ *s'injecte dans l'anneau* $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$ *des fonctions continues de* $\hat{A}$ *dans* $\hat{A}$ *: à tout polynôme* P *à valeurs entières sur* A *on peut associer l'application uniformément continue :*

$$x \in \hat{A} \longmapsto P(x) \in \hat{A}.$$

3.2. Proposition. [4] . *Si l'anneau* A *est de dimension* 1 , *les idéaux premiers de* $A[X]_{sub}$ *au-dessus de* m *sont tous de la forme :*

$$m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in m\hat{A}\} \quad \textit{où } x \textit{ est un élément de } \hat{A}.$$

Ces idéaux sont tous maximaux de corps résiduel isomorphe à A/m.

3.3. Remarque. Nous avons vu dans [5] que, si les idéaux m_x et m_y sont égaux, alors les éléments x et y aussi lorsque A est un anneau de valuation discrète et nous nous demandions dans [4] s'il en était ainsi pour tout anneau A (vérifiant les hypothèses 2.3). En fait :

Lorsque l'anneau $\hat{A}$ n'est pas intègre, dès que x-y est diviseur de zéro dans $\hat{A}$, alors les idéaux m_x et m_y sont égaux.

En effet, soient x et y dans $\hat{A}$ tels que x-y soit un diviseur de zéro dans $\hat{A}$. Soient $P(X) \in A[X]_{sub}$ et $d \in A - \{0\}$ tels que dP(X) appartienne à $A[X]$. En notant p_i les coefficients de P, on a :

$$d(P(x) - P(y)) = (x-y) \sum_{i \geq 1} (dp_i)\,(x^i - y^i)/(x-y) \qquad \text{où } dp_i \in A$$

et $(x^i - y^i)/(x-y) \in \hat{A}$. Ainsi, d(P(x) - P(y)) est diviseur de zéro dans $\hat{A}$, or d n'étant pas diviseur de zéro dans A, n'est pas non plus diviseur de zéro dans $\hat{A}$ ([1] , III), par suite P(x) - P(y) est diviseur de zéro dans $\hat{A}$, et en particulier appartient à $m\hat{A}$, d'où : $m_x = m_y$.

3.4. Proposition. [4]. *Si l'anneau* A *est de dimension* > 1 , *alors l'anneau* $A[X]_{sub}$ *est contenu dans l'anneau* $A'[X]$.

3.5. Remarques. a) Lorsque l'anneau A est de dimension >1, les inclusions 1.4 montrent que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A[X]_{sub}$ est entier sur $A[X]^{(k)}_{sub}$.

b) La proposition 3.4 est encore vraie lorsque A est un anneau intègre noethérien tel que tout idéal maximal de corps résiduel fini soit de hauteur >1.

3.6. Corollaire. [4]. *Si l'anneau* A *est de dimension* >1, *les idéaux premiers de* $A[X]_{sub}$ *au-dessus de* m *sont soit de la forme* $m_i[X] \cap A[X]_{sub}$ *où* m_i *décrit l'ensemble fini des idéaux maximaux de* A', *soit de la forme* $\overline{m}_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in \overline{m}\}$ *où* $\overline{m}$ *est un idéal maximal de* $\overline{A}$ *et où* x *appartient à* $\overline{A}$.

Compte-tenu de la remarque 3.5.a) :

3.7. Corollaire. *Si l'anneau* A *est de dimension* >1, *pour tout* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *les idéaux premiers de l'anneau* $A[X]^{(k)}_{sub}$ *au-dessus de* m *sont soit de la forme* $m_i[X] \cap A[X]^{(k)}_{sub}$, *soit de la forme* $\overline{m}^{(k)}_x = \{P(X) \in A[X]^{(k)}_{sub} \mid P(x) \in \overline{m}\}$.

On pourra donc se restreindre au cas où A est de dimension 1.

§ 4. **L'anneau** $A\,[X]^{(k)}_{sub}$ **où** $k \in \mathbb{N}$.

On conserve les hypothèses et notations 2.3.

4.1. Proposition. *Si l'anneau* A *est de dimension* 1 *, quels que soient le polynôme* $P(X) \in A\,[X]_{sub}$ *et l'entier* $k \in \mathbb{N}$ *, il existe* $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ *tel que* $P(X)^s$ *appartienne à* $A\,[X]^{(k)}_{sub}$.

Démonstration. Soient $P(X) \in A\,[X]_{sub}$ et $k \in \mathbb{N}$. Notons que si $P(X)$ appartient à $A\,[X]$, alors $P(X)$ appartient à $A\,[X]^{(k)}_{sub}$. Soit $d \in m - \{0\}$ tel que $dP(X)$ appartienne à $A\,[X]$. Puisque le radical de l'idéal dA est m et que la caractéristique p du corps résiduel A/m appartient à m, il existe un entier r tel que p^r appartienne à dA. Montrons que l'entier $s = p^{kr}$ convient, c'est-à-dire que le polynôme $Q(X) = P(X)^s$ appartient à $A\,[X]^{(k)}_{sub}$.

Pour $1 \leq h \leq k$, $Q^{(h)}(X)$ est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{a_1 + 2a_2 + \dots + ia_i = h} p^{kr}\, t_{a_0 a_1 \dots a_i}\; P(X)^{a_0}\, P'(X)^{a_1} \dots P^{(i)}(X)^{a_i}$$

où $t_{a_0 a_1 \dots a_i}$ appartient à $\mathbb{N}$. Comme $dP^{(i)}(X)$ appartient à $A\,[X]$ et p^r/d à A, $p^r P^{(i)}(X)$ appartient à $A\,[X]$ et comme $P(X)$ appartient à $A\,[X]_{sub}$, finalement $Q^{(h)}(X)$ appartient à $A\,[X]_{sub}$.

4.2 Remarque. La proposition précédente est encore vraie lorsque A est un anneau intègre noethérien tel que tout idéal maximal de corps résiduel fini soit de hauteur 1.

En effet, soient $P(X) \in A\,[X]_{sub}$, $k \in \mathbb{N}$ et $d \in A - \{0\}$ tel que $dP(X)$ appartienne à $A\,[X]$ .Pour tout idéal maximal m de A tel que A/m soit infini ou tel que d n'appartienne pas à m, $P(X)$ appartient à $A_m\,[X]$. Les idéaux maximaux m de A tels que A/m soit fini et que d appartienne à m sont en nombre fini ; à chacun on peut associer un entier $s_m > o$ tel que $P(X)^{s_m}$ appartienne à $A_m[X]^{(k)}_{sub}$; soit $s = \prod_m s_m$, alors pour tout idéal maximal m de A, $P(X)^s$ appartient à $A_m[X]^{(k)}_{sub}$, d'où P(X) appartient à $A[X]^{(k)}_{sub}$ (d'après 2.1.c)).

4.3. Proposition. *L'anneau* $A[X]_{sub}$ *est entier sur l'anneau* $A[X]^{(k)}_{sub}$ *quel que soit l'entier* k.

Démonstration. Lorsque A est de dimension 1, cela résulte de la proposition 4.1 : tout $P(X) \in A[X]_{sub}$ est solution d'une équation de la forme $Y^s - Q(X) = o$ où $Q(X) \in A[X]^{(k)}_{sub}$. Lorsque A est de dimension strictement supérieure à 1, cela résulte de la proposition 3.4 : on a les inclusions : $A[X] \subset A[X]^{(k)}_{sub} \subset A[X]_{sub} \subset A'[X]$.

Par suite, les idéaux premiers de $A[X]^{(k)}_{sub}$ au-dessus de m sont les intersections avec $A[X]^{(k)}_{sub}$ des idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de m. Ainsi de la proposition 3.2, résulte la :

4.4. Proposition. *Si l'anneau* A *est de dimension* 1 , *quel que soit* $k \in \mathbb{N}$, *les idéaux premiers de l'anneau* $A[X]^{(k)}_{sub}$ *au-dessus de* m *sont les idéaux maximaux*

$m^{(k)}_x = \{P(X) \in A[X]^{(k)}_{sub} \mid P(x) \in m\hat{A}\}$ *où* x *est un élément quelconque de* $\hat{A}$ *de corps résiduel isomorphe à* A/m . *En outre, l'application :* $m_x \longmapsto m^{(k)}_x = m_x \cap A[X]^{(k)}_{sub}$ *est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de* $A[X]_{sub}$ *au-dessus de* m *sur l'ensemble des idéaux premiers de* $A[X]^{(k)}_{sub}$ *au-dessus de* m.

En effet, si P(X) appartient à m_x et n'appartient pas à m_y , d'après la proposition 4.1, il existe s tel que $P(X)^s$ appartienne à $m^{(k)}_x$, alors que $P(X)^s$ ne peut appartenir à $m^{(k)}_y$.

4.5. Remarque. La proposition précédente généralise un résultat de Cahen [2], on ne peut l'obtenir ici en généralisant la méthode. En effet, cette méthode utilise le fait que $A[X]_{sub}$ est dense dans l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$ muni de la topologie de la convergence uniforme lorsque l'anneau A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. Or l'anneau $A[X]_{sub}$ n'est pas dense dans l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$, en particulier lorsque A est de dimension strictement supérieure à 1, ou lorsque $\hat{A}$ possède des diviseurs de zéro (car alors les idéaux m_x ne sont pas tous distincts lorsque x décrit $\hat{A}$). On ne sait pas si $A[X]_{sub}$ est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$ lorsque A est de dimension 1 et $\hat{A}$ intègre.

4.6. Corollaire. *Si l'anneau* A *est de dimension* 1 *, le radical de l'idéal* $m\,A[X]^{(k)}_{sub}$ *est l'idéal* $I^{(k)} = \{P(X) \in A[X]^{(k)}_{sub} \mid P(A) \subset m\}$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $A[X]^{(k)}_{sub} / I^{(k)}$ *est isomorphe à* $A[X]_{sub} / I$.

Démonstration. Le radical de l'idéal $m\,A[X]^{(k)}_{sub}$ est l'intersection des idéaux premiers de $A[X]^{(k)}_{sub}$ contenant m, c'est-à-dire des $m^{(k)}_x$ où x décrit $\hat{A}$ et, comme $A[X]_{sub}$ est contenu dans $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$, c'est aussi l'intersection des $m^{(k)}_a$ où a décrit A, c'est donc $I^{(k)}$.

Soient $k \in \mathbb{N}$, $P(X) \in A[X]_{sub}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que P^{q^r} appartienne à $A[X]^{(k)}_{sub}$. Posons $Q(X) = P(X) - P(X)^{q^r} = P(X)\,(1 - P(X)^{q^r-1})$. Puisque le groupe multiplicatif $A/m - \{o\}$ est d'ordre q-1, pour tout $a \in A$, Q(a) appartient à m. Donc $A[X]_{sub} = A[X]^{(k)}_{sub} + I$. D'où l'isomorphisme qui met d'ailleurs en évidence la bijection entre les idéaux premiers au-dessus de m.

4.7. Remarque. Lorsque la caractéristique de K est $p \neq o$, quel que soit $P(X) \in A[X]_{sub}$, $P(X)^p$ appartient à $A[X]^{(\infty)}_{sub}$ et donc les résultats 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.6 sont valables pour $k = \infty$. On peut donc désormais supposer K de caractéristique o.

§ 5. L'anneau $A[X]^{(\infty)}_{sub}$.

Conservons les hypothèses et notations 2.3 et supposons *l'anneau* A *de dimension* 1 *et le corps* K *de caractéristique* o .

5.1. Proposition. *Le radical de l'idéal* $mA[X]^{(\infty)}_{sub}$ *est l'idéal*

$$I^{(\infty)} = \{P(X) \in A[X]^{(\infty)}_{sub} \mid P(A) \subset m\} = I^{(k)} \cap A[X]^{(\infty)}_{sub} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^{(k)} .$$

Démonstration. Puisque $o \neq pA \subset m$ et que $\sqrt{pA} = m$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $m^{pt} \subset pA$. Soit $P \in I^{(\infty)}$, posons $Q = \frac{1}{p} P^{pt}$. On a $Q(A) \subset \frac{1}{p} m^{pt} \subset A$, d'où $Q \in A[X]_{sub}$ et en fait : $Q' = t P^{pt-1} P' \in A[X]_{sub}$, ... , $Q \in A[X]^{(\infty)}_{sub}$.

Ainsi, $P^{pt} = pQ$ appartient à $pA[X]^{(\infty)}_{sub}$, et par suite à $mA[X]^{(\infty)}_{sub}$.

5.2. Proposition. *Les idéaux premiers de* $A[X]^{(\infty)}_{sub}$ *au-dessus de* m *sont les idéaux maximaux*
$m^{(\infty)}_x = \{P(X) \in A[X]^{(\infty)}_{sub} \mid P(x) \in m\hat{A}\}$ *où* x *est un élément quelconque de* $\hat{A}$, *ils sont de corps résiduel isomorphe à* A/m.

Démonstration. Tout idéal premier M de $A[X]^{(\infty)}_{sub}$ au-dessus de m contient $mA[X]^{(\infty)}_{sub}$, donc $I^{(\infty)}$ d'après la proposition précédente et par suite $M/I^{(\infty)}$ est un idéal premier de l'anneau $A[X]^{(\infty)}_{sub}/I^{(\infty)}$; or, cet anneau s'injecte dans l'anneau $A[X]_{sub}/I$. Comme tout idéal premier minimal du premier anneau est image réciproque d'un idéal premier minimal du deuxième, que tout idéal premier du deuxième est de la forme m_x/I, que son image réciproque $m^{(\infty)}_x / I^{(\infty)}$ est un idéal maximal, on voit que l'on obtient ainsi tous les idéaux premiers de $A[X]^{(\infty)}_{sub} / I^{(\infty)}$.

5.3. Proposition. *Les idéaux premiers de* $A[X]_{sub}^{(\infty)}$ *au-dessus de* m *sont en nombre fini.*

Démonstration. Si v_p désigne la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$, il est facile de vérifier que $v_p(n!) < n/(p-1)$. Par suite, si $x-y$ appartient à l'idéal $p\hat{A}$, alors, pour tout $n \geq 1$, $(y-x)^n/n!$ appartient à l'idéal $p\hat{A}$. Ainsi, dès que $x-y$ appartient à $p\hat{A}$, pour tout polynôme $P(X) \in A[X]_{sub}^{(\infty)}$ de degré k, la différence :

$$P(x) - P(y) = (y-x)\,P'(x) + (y-x)^2/2!\; P''(x) + \dots + (y-x)^k/k!\; P^{(k)}(x)$$

appartient à $p\hat{A}$, donc à $m\hat{A}$, autrement dit $m_x^{(\infty)} = m_y^{(\infty)}$.

Comme il existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que m^r soit contenu dans pA, le quotient $\hat{A}/p\hat{A}$ est fini et les idéaux $m_x^{(\infty)}$ sont en nombre fini.

5.4. Remarque. La proposition précédente montre que lorsque les idéaux m_x de $A[X]_{sub}$ sont en nombre infini (ce qui est le cas lorsque A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini) l'isomorphisme entre $A[X]_{sub}^{(k)} / I^{(k)}$ et $A[X]_{sub} / I$ ne peut avoir lieu pour $k = \infty$.

§ 6. Polynômes à plusieurs variables (préliminaires).

Ce qui précède se généralise assez facilement aux polynômes à plusieurs variables aux difficultés de notations près.

6.1. Notations. Soit n un entier ≥ 1 supposé fixé. Le symbole $\underline{X}$ désignera le n-uple $(X_1, ..., X_n)$. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K, on notera $A[\underline{X}]_{sub}$ l'anneau $A[X_1, ..., X_n]_{sub} = \{P(X_1, ..., X_n) \in K[X_1, ..., X_n] \mid P(a_1, ..., a_n) \in A$ pour tout $(a_1, ..., a_n) \in A^n\}$. Pour tout n-uple $\underline{k} = (k_1, ..., k_n) \in \overline{\mathbb{N}}^n$ (où $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) notons $A[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})}$ l'anneau :

$$\left\{P(\underline{X}) \in K[\underline{X}] \;\middle|\; \frac{\partial^{h_1 + ... + h_n} P}{\partial X_1^{h_1} ... \partial X_n^{h_n}} (\underline{X}) \in A[\underline{X}]_{sub} \text{ pour } o \leq h_1 \leq k_1, ..., o \leq h_n \leq k_n\right\}$$

De façon analogue aux formules 2.1, on a :

6.2. Formules.

a) $S^{-1}(A[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})} \subset (S^{-1}A)[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})}$ pour toute partie multiplicative S de A.

b) $S^{-1}(A[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})}) = (S^{-1}A)[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})}$ lorsque A est noethérien.

c) $A[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})} = \bigcap_{m \in Max(A)} A_m[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})}$

d) $A_p[\underline{X}]_{sub}^{(\underline{k})} = A_p[\underline{X}]$ pour tout idéal premier p de A tel que A/p soit infini.

La formule a) se déduit par récurrence sur n de la formule 2.1.a). La formule b) résulte de ce qu'un sous-module d'un module de type fini sur un anneau noethérien est de type fini. La formule c) est immédiate compte-tenu de a). La formule d) se déduit de résultats généraux sur les polynômes à coefficients dans des modules (cf. [3]).

Comme dans le cas d'une variable, les idéaux premiers de $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ au-dessus d'un idéal premier p de A tel que A/p soit infini se déduisent de ceux de $A_p[\underline{X}]$ au-dessus de p (d'après 6.2.d)). On s'intéressera donc aux idéaux premiers au-dessus des idéaux maximaux de A de corps résiduel fini. Pour simplifier on supposera A noethérien et, compte-tenu de 6.2.b), on peut supposer A local.

Reprenons donc les hypothèses et notations 2.3.

6.3. Proposition. *Si* A *est de dimension strictement supérieure à* 1, *alors l'anneau* $A[\underline{X}]_{sub}$ *est inclus dans l'anneau* $A'[\underline{X}]$ *où* A' *désigne la clôture intégrale de* A.

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition pour une variable [4]. L'anneau A' est de Krull de dimension au moins égale à 2 et $A' = \cap A'_{p'}$, où p' décrit l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A'. Comme p' n'est pas maximal, A'/p' est infini, de même A/p est infini où $p = p' \cap A$ et $A_p[\underline{X}]_{sub} = A_p[\underline{X}]$, d'où :

$$A[\underline{X}]_{sub} \subset A_p[\underline{X}]_{sub} = A_p[\underline{X}] \subset A'_{p'}[\underline{X}] \text{ et } A[\underline{X}]_{sub} \subset \bigcap_{p'} A'_{p'}[\underline{X}] = A'[\underline{X}].$$

Par suite, $A'[\underline{X}]$ est entier sur $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ pour tout $\underline{k} \in \overline{\mathbb{N}}^n$ et les idéaux premiers de $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ se déduisent des idéaux premiers de $A'[\underline{X}]$. Nous pourrons donc nous restreindre au cas où A est de dimension 1.

§ 7. Polynômes à plusieurs variables et fonctions continues.

Conservons toujours les hypothèses et notations 2.3.

7.1. Proposition. *L'anneau* $A[\underline{X}]_{sub}$ *s'injecte dans l'anneau* $\mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A})$ *des fonctions continues de* $\hat{A}^n$ *dans* $\hat{A}$.

Démonstration. Adaptons la démonstration faite dans [4] dans le cas d'une variable. Pour tout élément non nul x de A, il existe un entier r(x) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \hat{A}$, ax appartient à $\hat{m}^{n+r(x)}$ implique a appartient à $\hat{m}^n$ (d'après le lemme d'Artin-Rees).

Soit $P(\underline{X}) = \sum p_{i_1 \ldots i_n} X^{i_1} \ldots X^{i_n}$ un élément de $A[\underline{X}]_{sub}$ et soit $x \in A - \{o\}$ tel que $xP(\underline{X})$ appartienne à $A[\underline{X}]$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et soient $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ des éléments de A^n tels que, quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, $a_i - b_i$ appartienne à $m^{s+r(x)}$.

On a : $x(P(\underline{a}) - P(\underline{b})) = x(P(a_1, a_2, \ldots, a_n) - P(b_1, a_2, \ldots, a_n)) - x(P(b_1, a_2,\ldots,a_n) - P(b_1, b_2, \ldots, a_n)) + \ldots + x(P(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_2) - P(b_1, \ldots, b_n))$.

Or, par exemple :

$$x(P(a_1,a_2,\ldots,a_n) - P(b_1,a_2,\ldots,a_n)) = x \sum_{i_1 \geq 1} p_{i_1\ldots i_n} (a^{i_1} - b^{i_1}) a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} =$$

$$(a_1 - b_1) \sum_{i_1 \geq 1} x\, p_{i_1\ldots i_n} \frac{a_1^{i_1} - b_1^{i_1}}{a_1 - b_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$$, ceci appartient à $(a_1 - b_1)A$ et, par suite à $m^{s+r(x)}$. Donc : $x(P(\underline{a}) - P(\underline{b}))$ appartient à $m^{s+r(x)}$ et par suite $P(\underline{a}) - P(\underline{b})$ appartient à m^s.

Ainsi, P peut être considéré comme une application uniformément continue de A^n dans A, elle est prolongeable en une application uniformément continue : $\underline{a} \in \hat{A}^n \longmapsto P(\underline{a}) \in \hat{A}$.

La proposition précédente montre que :

7.2. Pour tout $\underline{x} \in \hat{A}^n$, l'ensemble $m_{\underline{x}} = \{P(X) \in A[\underline{X}]_{sub} \mid P(x) \in m\hat{A}\}$ est un idéal, cet idéal est maximal de corps résiduel isomorphe à A/m.

Continuons l'analogie avec le cas d'une variable. Considérons l'idéal $I = \{P(\underline{X}) \in A[\underline{X}]_{sub} \mid P(A^n) \subset m\}$. On a $\mathscr{C}(\hat{A}^n, m\hat{A}) \cap A[\underline{X}]_{sub} = I$, donc $A[\underline{X}]_{sub}/I$ s'injecte dans l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A}) / \mathscr{C}(\hat{A}^n, m\hat{A})$ qui est isomorphe à $\mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$. D'après Bourbaki ([1], II), les idéaux premiers de l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$ sont les idéaux maximaux $\{f \in \mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A}) \mid f(\underline{x}) \in m\hat{A}\} / \mathscr{C}(\hat{A}^n, m\hat{A})$ où $\underline{x} \in \hat{A}^n$ car $\hat{A}^n$ est compact et totalement discontinu, ces idéaux sont au-dessus des idéaux $m_{\underline{x}}/I$ de $A[\underline{X}]_{sub}/I$ qui eux aussi sont maximaux. Comme tout idéal premier minimal de $A[X]_{sub}/I$ doit se relever en un idéal premier minimal de $\mathscr{C}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$, on voit que :

7.3. Les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{sub}$ contenant l'idéal $I = \{P \in A[\underline{X}]_{sub} \mid P(A^n) \subset m\}$ sont les idéaux maximaux $m_{\underline{x}}$ où $\underline{x} \in \hat{A}^n$.

§ 8. Polynômes à plusieurs variables : cas de la dimension 1.

Conservons les hypothèses et notations 2.3 et ajoutons la condition : *l'anneau* A *est de dimension* 1.

Le radical de l'idéal $mA[\underline{X}]_{sub}$ de $A[\underline{X}]_{sub}$ est alors l'idéal

$I = \{P \in A[\underline{X}]_{sub} \mid P(A^n) \subset m\}$. D'où la :

8.1. Proposition. *Si la dimension de* A *est égale à* 1 *, alors les idéaux premiers de* $A[\underline{X}]_{sub}$ *au-dessus de* m *sont les idéaux maximaux* $m_{\underline{x}} = \{P \in A[\underline{X}]_{sub} \mid P(\underline{x}) \in m\hat{A}\}$ *où* $\underline{x} \in \hat{A}^n$.

Les propositions 4.1 et 4.3 se généralisent sans aucune difficulté au cas de plusieurs variables, par suite :

8.2. Proposition. *Si* A *est de dimension* 1 *, pour tout* $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$ *, les idéaux premiers de* $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ *au-dessus de* m *sont les idéaux maximaux*

$m^{(\underline{k})}_{\underline{x}} = \{P \in A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} \mid P(\underline{x}) \in m\hat{A}\}$ *où* $\underline{x} \in \hat{A}^n$.

L'application $m_{\underline{x}} \longmapsto m^{(\underline{k})}_{\underline{x}}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{sub}$ au-dessus de m sur l'ensemble des idéaux premiers de $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ au-dessus de m.

Le corollaire 4.6 se généralise en :

8.3 Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$, le radical de l'idéal $mA[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ est l'idéal

$I^{(\underline{k})} = \{P \in A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} \mid P(A^n) \subset m\} = I \cap A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ et $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} / I^{(\underline{k})}$

est isomorphe à $A[\underline{X}]_{sub} / I$.

Lorsque K est de caractéristique $p > o$, ces résultats sont valables pour $\underline{k} \in \overline{\mathbb{N}}^n$. On supposera donc maintenant que K *est de caractéristique* o.

Munissons $\bar{\mathbb{N}}^n$ de l'ordre suivant :

$\underline{h} = (h_1, ..., h_n) \leq \underline{k} = (k_1, ..., k_n)$ si $h_1 \leq k_1, ..., h_n \leq k_n$. Alors, pour tout $\underline{k} \in \bar{\mathbb{N}}^n - \mathbb{N}^n$, on a :

$$A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} = \bigcap_{\underline{h} < \underline{k}} A[\underline{X}]^{(\underline{h})}_{sub} .$$

Les propositions 5.1 et 5.2 se généralisent en :

8.4. Pour tout $\underline{k} \in \bar{\mathbb{N}}^n$, le radical de l'idéal $mA[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ est l'idéal $I^{(\underline{k})} = \{P \in A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} \mid P(A^n) \subset m\} = I \cap A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ et les idéaux premiers de $A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub}$ au-dessus de m sont de la forme :

$$m^{(\underline{k})}_{\underline{x}} = m_{\underline{x}} \cap A[\underline{X}]^{(\underline{k})}_{sub} .$$

La proposition 5.3 donne en particulier :

8.5. Les idéaux premiers de l'anneau $A[X_1, ..., X_n]^{(\infty, ..., \infty)}_{sub}$ au-dessus de m sont en nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Paris 1961.

[2] P.-J. CAHEN, Polynômes et dérivées à valeurs entières, Ann. Sci. Uni. Clermont n^o 54, Math. n^o 10 (1975), 25-43.

[3] P.-J. CAHEN et J.-L. CHABERT, Coefficients et valeurs d'un polynôme, Bull. Sc. Math., 2^e série, 95 (1971), 295-304.

[4] J.-L. CHABERT, Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières, J. reine angew. Math. 293-294 (1977), 275-283.

[5] J.-L. CHABERT, Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, Bull. Soc. Math. France - 99 (1971), 273-283.