ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DAVID R. MCDONALD

Local limit theorems for non-identical integer valued random variables, to appear theory probability. Applications

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 94-95

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_94_0>

LOCAL LIMIT THEOREMS FOR NON-IDENTICAL INTEGER VALUED RANDOM VARIABLES, TO APPEAR THEORY PROBABILITY. APPLICATIONS

par

David R. McDONALD

Université d'OTTAWA

Soit V une variable aléatoire à valeurs entières. Soit

$$q_V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{minimum } \{\text{Prob}(V = k), \text{Prob}(V = k+1)\}.$$

Lemme Il existe des variables aléatoires (définies sur un nouvel espace de probabilité) Y, ε et L

t.q. (a) $V \equiv Y + \varepsilon L$ ($\equiv$ indique l'equivalence en loi)

(b) $\text{Prob}(\varepsilon = 1) = 1 - \text{Prob}(\varepsilon = 0) = q_V$

(c) $\text{Prob}(L = 1) = \text{Prob}(L = 0) = 1/2$

(d) L est indépendante de (Y,ε).

Soit $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières (pas forcément identiques).

Corollaire Il existe une décomposition de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

t.q.

(a) $S_n \equiv X_n + \sum_{k=1}^{N_n} L_k$

(b) $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de variables Bernouilli indépendantes

... /

t.q. (i) $\text{Prob}(L_k = 1) = \text{Prob}(L_k = 0) = 1/2$

(ii) $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ est indépendante de (Z_n, N_n)

(c) $N_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ où

(i) $\text{Prob}(\varepsilon_k = 1) = 1 - \text{Prob}(\varepsilon_k = 0) = q_{X_k}$

(ii) $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de v.a. indépendantes.

$\sum_{k=1}^{N_n} L_k$ est la composante de Bernouilli de S_n. $Q_n = EN_n = \sum_{k=1}^{n} q_{X_k}$ est une mesure du nombre de variables Bernouilli L_k que l'on puisse extraire de S_n. L'on démontre les theorèmes suivants à l'aide des estimées bien connues de la loi Binomiale appliquées à la composante de Bernouilli.

<u>Théorème</u> $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\text{Prob}(S_n = K) - \text{Prob}(S_n = K+1)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{Q_n}}$

où C est une constante universelle.

<u>Theorème</u> Si $B_n^2 = \text{Var } S_n$, $A_n = ES_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ et $\underline{\lim} \dfrac{\sqrt{Q_n}}{B_n} > 0$

alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n \left|\text{Prob}(S_n = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, B_n} \exp\left\{-\frac{(x-A_n)^2}{2B_n^2}\right\}\right| = 0.$

Cette limite est uniforme en x (un entier).

Soit $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs entières. Pour extraire la composante de Bernouilli de la somme des Y_k il est parfois avantageux de grouper les V_k par block. Soit $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ une partition des entiers de la forme

$$K_n = \{t_{n-1} + 1, t_{n-1} + 2, \ldots, t_n\} \quad t_0 = 0$$

Soit $X_k = \sum_{i \in K_k} Y_i$. Donc

$$\sum_{k=1}^{t_n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} X_k = Z_n + \sum_{k=1}^{N_n} L_k$$

par le Corollaire. Il s'agit donc de trouver une partition telle que Q_n soit aussi grand que possible. Evidement, si les Y_k ont tous période $p > 1$, aucun regroupement n'est possible et $Q_n = 0$ pour tout n.