

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GUY FOURS

Étude géométrique de l'analyse de la variance multidimensionnelle

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 44-62

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_44_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE GEOMETRIQUE DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE MULTIDIMENSIONNELLE

Guy FOURS

Université de Clermont-Ferrand

SOMMAIRE : Nous présentons une construction géométrique du test de Pillai et certaines généralisations.

INTRODUCTION :

Cette étude prolonge le travail [4], publié dans ces mêmes pages. Rappelons qu'il s'agit, étant données des v.a. X_i ($i = 1, 2, \dots, j$) indépendantes à valeurs dans R^k , de lois $\mathcal{N}(m_i, \Lambda)$, et une matrice de Wishart S de paramètre Λ à $\rho - j$ degrés de liberté, ($\rho - j > k$) de construire des tests de l'hypothèse $\{m_i = 0 \ \forall i\}$ (notée H_0) contre $\{ \exists i : m_i \neq 0 \}$ (notée \bar{H}_0). Sans perte de généralité on peut supposer Λ inversible ; de plus on se restreindra aux tests invariants par l'action des transformations linéaires inversibles $X_i \xrightarrow{m} G(X_i)$ et $S \xrightarrow{u} G S^t G$. En conclusion de [4], nous laissons entendre que cela risquait de conduire à des tests sophistiqués ; de fait nous retrouvons, sous une forme cachée, le test de Pillai. Signalons qu'on trouve dans un article de R. SCHWARTZ [7], repris sous une forme plus générale par TAKEAKI KARIYA [8] une variante de ce travail, non bayésienne, mais utilisant l'invariance sous un groupe de transformations plus riche. Ces deux types de résultats expliquent le travail de PILLAI et JAYACHANDRAN [6].

Les notations utilisées ici seront les mêmes qu'en [4], et nous ne reviendrons pas sur la description des cônes homogènes qui a été faite ; le chapitre V montrera le rôle fondamental de cette structure en abordant des généralisations, les quatre premiers étant l'étude détaillée du problème de l'analyse de la variance.

I - RECHERCHE DE STATISTIQUES INVARIANTES MAXIMALES

Soit T une transformation triangulaire. Sous son action, les données sont transformées en $T(X_i)$ et $T S^t T$. Les statistiques invariantes sous l'action du groupe triangulaire sont donc les $S^{\perp-1} \perp(X_i)$. Soit maintenant pour G élément du groupe orthogonal $O(k)$, T et T' les matrices triangulaires supérieures définies par $T^t T = S$, $T'^t T' = G S^t G = S'$.

Si les X_i sont transformés en $G(X_i)$ alors $S^{\perp-1} \perp(X_i) = T^{-1}(X_i)$ est transformé en $S'^{\perp-1} \perp(G(X_i)) = T'^{-1} G(X_i)$ ou encore en $T'^{-1} G T(S^{\perp-1} \perp(X_i))$, et l'opération $T'^{-1} G T$ est une transformation orthogonale. Rechercher un invariant par l'ensemble de ces opérations revient à rechercher un invariant par le groupe engendré par ces opérations (elles ne forment pas un groupe !).

THEOREME 1 :

Le groupe engendré par les $T'^{-1} G T$ est $O(k)$.

Preuve : Montrons que pour T fixé, $G \xrightarrow{\mathcal{M}} T'^{-1} G T$ est une bijection entre deux voisinages de l'identité, ou ce qui est équivalent, que $d G \xrightarrow{\mathcal{M}} d(T'^{-1} G T)$ est une bijection entre algèbres de Lie de $O(k)$.

Les calculs seront effectués en $G =$ identité, d'où $T' = T$.

$$d(T'^{-1} G T) = d(T'^{-1}) T + T^{-1} dG T = -T'^{-1} dT' + T^{-1} dG T.$$

Différentions $T'^t T' = G T^t T G$

$$d T'^t T + T d T' = d G T^t T + T^t T d G.$$

Les matrices $d T'^t T$ et $d G T^t T$ ont donc même symétrisées et diffèrent d'une matrice antisymétrique (donc dans l'algèbre de Lie de $O(k)$) dh

$$d T'^t T = d G T^t T + dh.$$

On en déduit

$d(T'^{-1} G T) = T^{-1} dh^t T^{-1}$, et le fait que $dh \xrightarrow{\mathcal{M}} d(T'^{-1} G T)$ est une bijection linéaire. De plus $T^{-1} d T' = T^{-1} d G T + T^{-1} dh^t T^{-1}$ doit être triangulaire supérieure. Si $()^-$ désigne la partie triangulaire strictement inférieure à la diagonale d'une matrice, dh vérifie donc :

$$(T^{-1} d G T)^- + (T^{-1} dh^t T^{-1})^- = 0.$$

La correspondance $dh \xrightarrow{m} dG$ est linéaire, et si $dG = 0 \quad T^{-1} dh^t T^{-1}$ qui est antisymétrique ne peut être que nulle, de même que dh ; $dh \xrightarrow{m} dG$ est donc une bijection.

La figure formée par O et les $S^{\perp-1} \perp(X_i)$ est donc globalement invariante. Nous étudierons donc dans un premier temps, les $\|S^{\perp-1} \perp(X_i)\|$ et les angles entre les $S^{\perp-1} \perp(X_i)$.

Notons maintenant par $H_{(r,r+1)}(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ conservant toutes les coordonnées sauf celles d'ordre r et $r+1$ et de façon générale définissons par récurrence :

$$H_{(r,r')}(\theta_r, \theta_{r+1}, \dots, \theta_{r'-1}) = H_{(r,r'-1)}(\theta_r, \dots, \theta_{r'-2}) H_{(r'-1,r')}(\theta_{r'-1}).$$

Citons les deux faits suivants :

a) On peut établir par récurrence la décomposition d'Euler de toute matrice H de $O(k)$:

$$H = H_{(1,k-1)}(\theta_1, \dots, \theta_{k-2}) \cdot H_{(k-1,k)}(\theta_k) \cdot H'$$

où $H' \in O(k-1)$ (décomposition precession x nutation x rotation propre), d'où la décomposition :

$$H = H_{(1,k)} H_{(1,k-1)} \dots H_{(1,i)} \dots H_{(1,2)}.$$

b) En explicitant les arguments $\theta_{r,i}$ ($r < i$) de $H_{(1,i)}$ dans la décomposition ci-dessus, la mesure de Haar dH de $O(k)$ est donnée par :

$$dH = \prod_{0 < r < i} |\sin \theta_{r,i}|^{r-1} \prod_{0 < r < i} d\theta_{r,i}.$$

La technique utilisée consistera de façon naturelle à passer dans un repère aléatoire mettant en évidence des invariants équivalents comme suit :

Aux $S^{\perp-1} \perp(X_i)$ on applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt ; si $j < k$, on complète par un repère choisi "au hasard" dans l'orthogonal de ces vecteurs. (Pour des raisons de commodité de calcul on réordonnera à l'envers ce repère). On écrit alors :

$$S^{\perp-1} \perp(X_1) = ||S^{\perp-1} \perp(X_1)|| v_k,$$

et plus généralement :

$$S^{\perp-1} \perp(X_i) = ||S^{\perp-1} \perp(X_i)|| H_{(k-i+1V1, k)} (\theta_{k-i+1V1}^{(i)}, \dots, \theta_{k-1}^{(i)}) [v_k].$$

Les angles $\theta_r^{(i)}$ sont encore des invariants (par construction) et leur donnée permet de calculer les angles entre les $S^{\perp-1} \perp(X_i)$ dans le repère aléatoire, donc dans tout repère orthonormé. Ce sont eux que nous utiliserons de préférence.

II - CALCUL DE LA LOI DES STATISTIQUES INVARIANTES

THEOREME 2 :

La densité des $T_i = ||S^{\perp-1} \perp(X_i)||^2$ et des $\theta_r^{(i)}$ est donnée par :

$$k(e) e^{-\sum_{i=1}^j ||a \perp(m_i)||^2} \prod_{i=1}^j t_i^{\frac{k}{2}-1} \prod_{i=1}^j \prod_{r=k-i+1V1}^{k-1} |\sin \theta_r^{(i)}|^{r-1}$$

$$\iint_{\mathcal{M}_k^+ \times \mathcal{O}(k)} \langle e, s \perp(e + \sum_{i=1}^j t_i H_i \cdot H_i(e_k) \Delta H_i \cdot H_i(e_h)) \rangle$$

$$2 \prod_{i=1}^j \sqrt{t_i} \langle a \perp(m_i), s \perp H_i \cdot H_i(e_k) \rangle_s \frac{\rho}{2} (1 \dots 1) d\mu(s) dH$$

où on a abrégé $H_{(k-i+1V1, k)}$ en H_i et où $a = \frac{\Lambda^{-1}}{4}$.

Preuve : $P(\bigcap_{i=1}^j \{T_i < t_i\} \cap \bigcap_{r=h-i+1V1}^{k-1} \{\theta_r^{(i)} \in A_r^i\})$

$$= k(a) e^{-\sum_{i=1}^j ||a \perp(m_i)||^2} \iint_e \langle -a^*, s \perp(e + \sum_{i=1}^j x_i \Delta x_i) \rangle ||S^{\perp-1} \perp(x_i)||^2 < t_i, \theta_r^{(i)} \in A_r^i$$

$$e \langle a^*, \sum_{i=1}^j x_i \Delta m_i \rangle_s \frac{\rho-j}{2} (1, \dots, 1) d\mu(s) \prod_{i=1}^j dx_i.$$

On transforme cette expression, comme dans [4] pour obtenir, $d\sigma$ étant la mesure de Lebesgue sur $\|u\| = 1$:

$$h(e) e^{-\sum_{i=1}^j \|a_{\perp}(m_i)\|^2} \iint_e \langle e, s_{\perp}(e + \sum_{i=1}^j \tau_i u_i \Delta u_i) \rangle$$

$$\tau_i < t_i, \theta_r^{(i)} \in A_r^i$$

$$e^{\sum_{i=1}^j \sqrt{\tau_i} \langle a_{\perp}(m_i), s_{\perp}(u_i) \rangle} \frac{\rho}{2} (1 \dots 1) \prod_{i=1}^j \tau_i^{\frac{k}{2} - 1}$$

$$d\mu(s) \prod_{i=1}^j d\tau_i \prod_{i=1}^j d\sigma(u_i) .$$

Associons, comme en I aux u_i , un repère orthogonal tel que $u_1 = v_k$, u_2 soit combinaison linéaire de $(v_k, v_{k-1}) \dots$; soit H la matrice de changement de base et H_i la matrice telle que :

$$H_{(k-i+1V1, k)} [v_k] = u_i .$$

Le résultat est alors obtenu par le lemme suivant :

Lemme du changement de repère aléatoire :

Avec les notations précédentes :

$$\prod_{i=1}^j d\sigma(u_i) = dH \prod_{i=1}^j \prod_{r=k-i+1V1}^{k-1} |\sin \theta_r^{(i)}|^{r-1} d\theta_r^{(i)} .$$

Preuve du lemme : Si les u_i suivent la loi $\prod_{i=1}^j d\sigma(u_i)$, il est évident que

la loi de H, conservée par translation à gauche est dH. Ecrivons la décomposition d'Euler : $H = H_{(1, k)}^* \cdot h_1$ ($h_1 \in O(k-1)$).

Comme $h_1(e_k) = e_k$ et que $u_1 \xrightarrow{h_1} H_{(1k)}(e_k)$ est bijective, la loi de h_1 conditionnelle à u_1 est la loi de h_1 conditionnelle à $H_{(1, k)}^*$ donc la mesure de Haar de $O(k-1)$. On écrit alors :

$$u_2 = H_{(1k)}^* \cdot h_1 \cdot H_{(k-1, k)} (\theta_{k-1}^{(2)}) [e_k] .$$

La loi de u_2 conditionnelle à u_1 est uniforme ; donc la loi de

$h_1 \cdot H_{(k-1,k)}^{(2)}(\theta_{k-1}^{(2)}) [e_k]$ doit être uniforme. Puisque $h_1(e_{k-1})$ est uniforme sur la sphère du plan orthogonal à e_k , $\theta_{k-1}^{(2)}$ suit donc la loi :

$$|\sin \theta_{k-1}^{(2)}|^{k-2} d\theta_{k-1}^{(2)}.$$

Plus généralement, par décompositions d'Euler successives, nous écrivons :

$$H = H_{(1,k)}^* H_{(1,k-1)}^* \cdots \cdot H_{(1,k-i+2\nu_2)}^* \cdot h_{i-1}.$$

La loi de h_{i-1} , conditionnelle aux (u_1, \dots, u_{i-1}) ou encore aux

$(H_{(1,k)}^* H_{(1,k-1)}^* \cdots H_{(1,k-i+2\nu_2)}^*)$ est la mesure de Haar de $O(k-i+1\nu_1)$ et

on en déduit de ce que la loi de u_i conditionnelle aux (u_1, \dots, u_{i-1}) est uniforme et de ce que,

$$h_{i-1} \cdot H_{(k-i+1\nu_1,k)}^{(i)}(\theta_{k-i+1\nu_1}^{(i)}, \dots, \theta_{k-1}^{(i)}) [e_k]$$

doit être uniforme, que la loi de $\theta_r^{(i)}$ est :

$$\prod_{r=k-i+1}^{k-1} |\sin \theta_r^{(i)}|^{r-1} d\theta_r^{(i)}.$$

Corollaire :

Sous l'hypothèse nulle la valeur de l'intégrale écrite au théorème 2 est

$$f(t_1, \dots, t_j) = (e + \sum_{i=1}^j t_i H_i(e_k) \Delta H_i(e_k))^{-\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)}.$$

Preuve : Posons $w = e + \sum_{i=1}^j t_i H_i(e_k) \Delta H_i(e_k)$, nous avons à calculer, pour $w \in \mathcal{M}_k^+$:

$$\iint_{\mathcal{M}_k^+ \times O(k)} e^{-\langle e, s \rangle (H-w)^t H} s^{\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)} d\mu(s) dH$$

qui se réduit facilement (voir [2] ou [3] à

$$\Gamma\left(\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)\right) \int_{O(H)} \frac{dH}{(H w^t H)^{\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)}}.$$

Notons par $\det_m(s)$ le déterminant de la matrice $m \times m$ inférieure droite de s ; en explicitant α , (voir [3]) l'intégrale se met sous la forme :

$$\frac{1}{(\det_k w)^{\frac{\rho-k+1}{2}}} \int_{O(k)} \frac{dH}{\prod_{m=1}^{k-1} \det_m(Hw^t H)} .$$

Une récurrence sur k va montrer que la dernière intégrale est proportionnelle à $(\det_k w)^{-\frac{k-1}{2}}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que w est diagonale de valeurs propres a_1, \dots, a_k ; H admet une décomposition (de type Euler)

$$H = \bar{H} \circ H_{(1,k)} \quad \text{où } \bar{H}(e_1) = e_1 .$$

Nous avons à calculer d'abord, en posant $w_1 = H_{(1,k)} w^t H_{(1,k)}$

$$\int \frac{d\bar{H}}{\prod_{m=1}^{k-1} \det_m(\bar{H} w_1^t \bar{H})} \quad \text{qui, puisque}$$

$$\det_{k-1}(\bar{H} w_1^t \bar{H}) = \det_{k-1} w_1$$

et par l'hypothèse de récurrence, est égale à $\frac{1}{(\det_{k-1} w_1)^{\frac{k}{2}}}$.

Posons ensuite $w_2 = H_{(2,k)} w^t H_{(2,k)}$, qui s'écrit encore, en isolant les deux premières lignes et colonnes, sous la forme "blocs".

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & w'_3 \\ 0 & w'_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\det_{k-1} H_{(1,2)}(\theta) \cdot w_2^t H_{(1,2)}(\theta) = \begin{vmatrix} a_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta, & \cos \theta w'_3 \\ \cos \theta w'_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \sin^2 \theta & \cos \theta^t w'_3 \\ 0 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \cos^2 \theta & \cos \theta^t w'_3 \\ \cos \theta w'_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \sin^2 \theta \det_{k-2} w_2 + \cos^2 \theta \det_{k-1} w_2.$$

On calcule alors $\int \frac{|\sin \theta|^{k-2} d\theta}{[\det_{k-1} [H_{12}(\theta) \cdot w_2^t H_{12}(\theta)]]^{\frac{k}{2}}}$

par des méthodes élémentaires pour trouver (à un facteur près)

$$a_1^{-\frac{k-1}{2}} (\det_{k-1} w_2)^{-\frac{1}{2}} (\det_{k-2} w_2)^{-\frac{k-1}{2}}$$

soit encore $a_1^{-\frac{k-1}{2}} (a_2 \dots a_k)^{-\frac{1}{2}} (\det_{k-2} w_2)^{-\frac{k-1}{2}}$.

les intégrales à calculer ensuite sont du même type, en remplaçant k par k-1, ..., k-2, ... d'où le résultat :

$$a_1^{-\frac{k-1}{2}} (a_2 \dots a_k)^{-\frac{1}{2}} a_2^{-\frac{k-2}{2}} (a_3 \dots a_k)^{-\frac{1}{2}} \dots a_k^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a_1^{-\frac{k-1}{2}} a_2^{-\frac{k-1}{2}} \dots a_k^{-\frac{k-1}{2}} = (\det w)^{-\frac{k-1}{2}}.$$

III - RECHERCHE DE TESTS LOCALEMENT UMP

THEOREME 3 :

Il n'existe pas de tests localement UMP invariants sous le groupe linéaire de H_0 contre \bar{H}_0 .

Preuve : Nous différencions la densité de la statistique invariante, par rapport au paramètre :

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_j \end{pmatrix}$$

en $m = 0$. La différentielle première est identiquement nulle.

L'expression $f(t_1, \dots, t_j)$ étant définie comme précédemment, nous posons :

$$M_{ii'} = \iint_{\mathcal{M}_k^+ \times O(k)} \langle e, s_{\perp} (e + \sum_{i=1}^j t_i H_i(e_k) \Delta H_i(e_k)) \rangle \sqrt{t_i t_{i'}} s_{\perp} (H_i(e_k) \Delta H_i(e_k)) s^{\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)} d\mu(s) dH.$$

La matrice de la différentielle seconde se calcule par blocs $k \times k$ au moyen des différentielles partielles $D_{m_i}^2 m_i$. La forme différentielle seconde se met sous la forme :

$$\begin{aligned} (t_{\mu_1} \dots t_{\mu_j}) D_{(m,m)}^2 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq i \leq i' \leq j} t_{(a_i(\mu_i), a_{i'}(\mu_{i'}))} A_{ii'}(a_i(\mu_i)) \\ &= \sum_{i=1}^j t_{(a_i(\mu_i), a_{ii}(a_i(\mu_i)))} A_{ii}(a_i(\mu_i)) + \sum_{1 \leq i < i' < j} t_{(a_i(\mu_i), a_{i'i}(a_{i'}(\mu_{i'})))} (A_{ii'} + A_{i'i})(a_i(\mu_i)) \end{aligned}$$

avec $A_{ii} = 2 f(t_1 \dots t_j) e + 4 M_{ii}$

$$A_{ii'} + A_{i'i} = 4 M_{ii'} \text{ pour } i \neq i'.$$

Etant donné un élément \bar{H} dans $O(k)$, on effectue le changement de variable

$$\begin{cases} s' = \bar{H} \cdot s \cdot \bar{H} \\ H' = T'^{-1} \cdot \bar{H} \cdot T \cdot H \end{cases}$$

(où on a posé $s = T \cdot t_T$, $s' = T' \cdot t_{T'}$, T et T' étant des matrices triangulaires supérieures). $s \mapsto \bar{H} \cdot s \cdot \bar{H}$ conserve $s^{\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)} d\mu(s)$, et pour s fixé $T'^{-1} \cdot H \cdot T$ est orthogonale et la deuxième expression conserve dH ; la première expression ne faisant pas intervenir H , l'ensemble des deux conserve $s^{\frac{\rho}{2}(1 \dots 1)} d\mu(s) dH$. On en déduit les égalités $\bar{H} \cdot M_{ii'} \cdot \bar{H} = M_{ii'}$, qui montrent que les $M_{ii'}$ sont proportionnelles à la matrice identité e . soit :

$$M_{ii'} = \frac{\langle e, M_{ii'} \rangle}{k} e$$

Pour $i \neq i'$ les produits scalaires $\langle e, M_{ii'} \rangle$ sont non nuls (ils sont évidemment strictement positifs en $H_i = H_{i'}$, donc strictement positifs dans un voisinage de cette variété). En appliquant le lemme de Neymann Pearson, un test localement M.P. sera fortement influencé par le choix des produits scalaires $\langle a_1(m_i), a_1(m_{i'}) \rangle$ et il n'existe pas de test localement U.M.P.

THEOREME 4 :

Si les μ_i sont des v.a. indépendantes, de même loi, et si leur loi commune ne dépend que de $\|a_1(\mu_i)\|$ il existe un test localement UMP de H_0 contre les hypothèses $\|a_1(\mu_1)\| = \dots = \|a_1(\mu_j)\|$.

Sa zone de rejet est donnée par :

$$- \sum_{i=1}^j t_i \frac{\partial f}{\partial t_i} > c f.$$

Preuve : Les hypothèses sur les μ_i impliquent que :

$$E(a_1(\mu_i)) \mid (\|a_1(\mu_1)\| \dots \|a_1(\mu_j)\|) = 0$$

$$E(\|a_1(\mu_i)\|^2 \mid (\|a_1(\mu_1)\| \dots \|a_1(\mu_j)\|)) = \|a_1(\mu_i)\|^2.$$

Le lemme de Neymann Pearson conduit à maximiser :

$$\begin{aligned} & E(D_{mm}^2[\mu, \mu] \mid (\|a_1(\mu_1)\| \dots \|a_1(\mu_j)\|)) \\ &= \sum_{i=1}^j \|a_1(\mu_i)\|^2 \left(2f - 4 \frac{t_i}{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} \right) \end{aligned}$$

et à rejeter H_0 si cette expression est supérieure à $c_1 f$. Supposant les $\|a_1(\mu_i)\|^2$ égaux entre eux la zone de rejet peut s'écrire sous la forme annoncée.

THEOREME 5 :

Sous les mêmes hypothèses Bayésiennes, il n'existe pas de test UMP invariant. (pour $j > 1$).

Preuve : Choisissons pour loi des m_i la loi $\mathcal{N}(0, \epsilon \Lambda)$ ($\epsilon > 0$). Par les formules de convolution, la loi moyenne de X_i sous l'hypothèse adverse sera $\mathcal{N}(0, (1+\epsilon)\Lambda)$.

Reprenant les calculs précédents, la densité de la statistique invariante est :

$$\frac{K \prod_{i=1}^j t_i^{\frac{k}{2}-1} \prod_{i=1}^j \prod_{r=k-i+1}^{k-1} V_i \left| \sin \theta_r^{(i)} \right|^{r-1}}{\left(\det \left(e + \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^j t_i H_i(e_k) \Delta H_i(e_k) \right) \right)^{\frac{\rho}{2}}}$$

Le test M.P. correspondant sera basé sur le rapport :

$$\frac{\det \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)}{\det \left(e(1+\epsilon) + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)}$$

et dépend de ϵ pour $j > 1$.

IV - OÙ ON RETROUVE LE TEST DE PILLAI

THEOREME 6 :

Le test construit au théorème 4 n'est autre que le test de la trace de Pillai, donné par :

$$\sum_{i=1}^j t_{X_i} \left(S + \sum_{i=1}^j X_i \Delta X_i \right)^{-1} X_i > C.$$

Preuve : Nous avons établi que (corollaire du théorème 2)

$$f = K \det \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)^{-\frac{\rho}{2}}.$$

La zone de rejet peut donc s'écrire :

$$\sum_{i=1}^j t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\det \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right) \right) > C_2 \det \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right).$$

Notons par s_m le $m^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice s . On a alors les

égalités :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\det \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right) \right) \\ = & \sum_{i=1}^j t_i \sum_{m=1}^k \det \left(\begin{array}{c} e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \\ \hline 1, \dots, \frac{e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{m-1}, \frac{V_i \Delta V_i}{m}, \\ \hline \frac{e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{m+1}, \dots, \frac{e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{k} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^k \det \left(\frac{e^+ \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{1}, \dots, \frac{e^+ \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{m-1}, \sum_{i=1}^j \frac{t_i V_i \Delta V_i}{m}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^+ \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{m+1}, \dots, \frac{e^+ \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i}{k} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^k \det \left(e - \frac{e_m \Delta e_m}{2} + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right).
 \end{aligned}$$

Comme det est une fonction puissance, la zone de rejet peut alors s'écrire :

$$\sum_{m=1}^k \det \left(e - \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)^{\perp-1} \perp \frac{e_m \Delta e_m}{2} \right) > C_2.$$

On utilise alors l'identité, où $u \in R^k$:

$$\det(e - u \Delta u) = 1 - ||u||^2 = 1 - \langle e, u \Delta u \rangle$$

pour ramener la zone de rejet à :

$$k \cdot \sum_{m=1}^k \langle e, \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)^{\perp-1} \perp \frac{e_m \Delta e_m}{2} \rangle > C_2$$

ou plus simplement à :

$$\langle e, e - \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)^{\perp-1} \rangle > C_2.$$

Remarquant alors que $(e + s)^{\perp-1} \perp s = (e+s)^{\perp-1} \perp (e+s-e) = e - (e+s)^{\perp-1}$

on écrit la zone de rejet comme :

$$\langle e, \left(e + \sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right)^{\perp-1} \perp \left(\sum_{i=1}^j t_i V_i \Delta V_i \right) \rangle > C_2$$

et rappelant que $t_i V_i \Delta V_i = S^{\perp-1} \perp (X_i \Delta X_i)$ comme :

$$\langle e, \left(S + \sum_{i=1}^j X_i \Delta X_i \right)^{\perp-1} \perp \sum_{i=1}^j X_i \Delta X_i \rangle > C_2$$

qui est la forme classique, compte tenu de la définition de \langle , \rangle en terme de trace.

V - EXTENSION A CERTAINES HYPOTHESES LINEAIRES

A quelques détails près (essentiellement de mise en forme), ces résultats peuvent s'appliquer à une classe de cônes homogènes plus vaste. De façon précise, nous supposerons que le paramètre Λ^{-1} appartienne à un sous espace vectoriel \mathcal{P} de $R^{\frac{k(k+1)}{2}}$, et surtout que le cône $U^* = \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_k^+$ est homogène sous l'action de certaines transformations linéaires,

$$a^* \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_k^+ \xrightarrow{t_g} a^* g.$$

Nous aurons fréquemment à faire référence au cône homogène \mathcal{M}_k^+ ; nous repérerons par un indice 0 les outils de cet espace. Π désignera la projection de $R^{\frac{k(k+1)}{2}}$ sur \mathcal{P} .

On pourra se reporter à [3] pour l'étude systématique de ces outils.

LEMME 1 :

Sans perte de généralité, on peut supposer que la loi de groupe \perp sur U^* est la restriction aux éléments de \mathcal{P} de la loi de groupe \perp_0 sur \mathcal{M}_k^+ (en particulier que $e \in U^*$).

Preuve : Soit \mathcal{G} un sous groupe de transformations $a^* \xrightarrow{t_g} a^* g$ agissant de façon simplement transitive. \mathcal{G} est résoluble et il en est de même du groupe des transformations linéaires associées : elles sont donc simultanément triangulables et s'écrivent sous la forme $g = \bar{g} T \bar{g}^{-1}$. Un changement de base de matrice \bar{g} ramène au cas d'un sous groupe d'opérateurs triangulaires.

LEMME 2 :

La loi Δ^* sur \mathcal{P} est la restriction de la loi Δ_0^* sur $R^{\frac{k(k+1)}{2}}$. La loi duale Δ sur \mathcal{P} est définie par $a \Delta b = \Pi(a \Delta_0 b)$. Enfin les opérateurs $u \xrightarrow{t_g} \Pi(g u t_g)$ forment le groupe agissant de façon simplement transitive sur le cône dual \mathcal{U} de U^* .

Preuve : La première assertion se déduit sans peine du lemme 1. L'opérateur

$$L_o^* \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix}, \text{ agissant sur } R^{\frac{k(k+1)}{2}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}^\perp \text{ s'écrit donc } \begin{pmatrix} L_a^* & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}.$$

Son dual relativement au produit scalaire \langle , \rangle_o sur $R^{\frac{k(k+1)}{2}}$ est donc

$$\begin{pmatrix} L_a & 0 \\ M_1^* & M_2^* \end{pmatrix} \text{ et on vérifie ensuite que } \begin{pmatrix} L_a(b) \\ 0 \end{pmatrix} = \Pi L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin $\Pi L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix} \Pi = \Pi L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix}$. On en déduit que :

$$(\Pi L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix})^n = \Pi (L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix})^n, \text{ et par passage à l'exponentielle que}$$

$$\exp(\Pi L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix}) = \Pi \exp L_o \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix}, \text{ d'où la dernière assertion puisque les}$$

$\exp L_a$ engendrent le groupe simplement transitif de \mathcal{U} .

LEMME 3 :

Les restrictions des fonctions puissances de \mathcal{M}_k^* à \mathcal{U}^* sont les fonctions puissances de \mathcal{U}^* . (Conséquence facile du lemme 1).

DEFINITION :

Pour u et v dans R^k , on définit $u \Delta v = \Pi(u \Delta_o v)$ (c'est un élément de \mathcal{P}), et si s est un élément de \mathcal{U} se mettant sous la forme (unique) $s = \Pi(T^t T)$, on posera $s \perp (u) = T(u)$.

THEOREME 7 :

Pour un échantillon de v.a. normales $\mathcal{N}(m, \Lambda)$, et une matrice de Wishart S_o à $\rho-1$ degrés de liberté de paramètre Λ , les statistiques $X = \frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}$ et $S = \Pi(S_o)$ sont exhaustives si $\Lambda^{-1} \in \mathcal{P}$; leurs densités prennent alors la forme (avec $a^* = \frac{\Lambda^{-1}}{4}$)

$$\frac{1}{\sqrt{2n} a^\beta} e^{-\langle a^*, (x-m) \Delta (x-m) \rangle} dx \quad (1)$$

$$\frac{1}{\Gamma((\rho-1) \beta) a^{(\rho-1)\beta}} e^{-\langle a^*, s \rangle} s^{(\rho-1)} d\mu(s) \quad (2)$$

Preuve : La première assertion est classique (voir exemple [1] chapitre X).

Par le lemme 3, $\det a^*$ est (pour les éléments de \mathcal{U}) une fonction puissance notée ici $a^* s(2\beta) = a^{2\beta}$, de plus :

$$\begin{aligned} \langle a^*, (x-m) \Delta_0(x-m) \rangle_0 &= \langle a^*, \Pi[(x-m) \Delta_0(x-m)] \rangle_0 \\ &= \langle a^*, (x-m) \Delta(x-m) \rangle, \end{aligned}$$

d'où la forme de la loi (1).

S_0 suit la loi de Wishart à $(\rho-1)$ degrés de liberté de transformée de Laplace $\left[\det(a^* + p) \right]^{-\frac{\rho-1}{2}}$.

La transformée de Laplace de $\Pi(S_0)$ est donc, pour p dans \mathcal{U}^* :

$$\begin{aligned} E(e^{-\langle p, \Pi(S_0) \rangle}) &= E(e^{-\langle p, S_0 \rangle}_0) \\ &= (\det(a^* + p))^{-\frac{\rho-1}{2}} = (a^* + p)^{(\rho-1) s(\beta)} \end{aligned}$$

et le résultat (2) s'obtient alors par identification des transformées de Laplace. cf[2] ou [3].

Nous allons maintenant suivre pas à pas le début de cet exposé, quitte à l'aménager un peu pour faire intervenir le caractère propre de \mathcal{U} . Aussi les théorèmes seront énoncés sans autre justification que les corrections introduites.

$X_i (i=1,2,\dots,j)$ désignera des v.a. indépendantes de \mathbb{R}^k de loi (1) et S une v.a. de loi (2) indépendantes des X_i . \mathcal{K} sera le sous groupe de $O(k)$ conservant \mathcal{P} .

THEOREME 8 :

Une statistique invariante maximale sous le groupe linéaire conservant \mathcal{P} est donnée par les $\|S^{-1}(X_i)\|^2$, les $H_{(k-jv_1, k)}^{(i)}$ et par $H(\text{mod } \mathcal{K})$.

Preuve : Les $S^{\perp-1}(X_i)$ sont les seules statistiques invariantes sous les transformations triangulaires conservant \mathcal{P} , par construction de \perp . Sous l'action d'une transformation K de \mathcal{K} , elles subissent l'action d'une autre transformation K_1 de \mathcal{K} . La matrice de passage aléatoire H devient alors $K_1 H$. Le résultat s'obtient en remarquant que les K_1 engendrent \mathcal{K} (théorème 1).

THEOREME 9 :

Ces statistiques ont pour densité, relativement aux $t_i, d\theta_r^{(i)}$ et, à la mesure relativement invariante sur $O(k)/\mathcal{K}$

$$k(e) e^{-\sum_{i=1}^j ||a_{\perp}(m_i)||^2} \prod_{i=1}^j t_i^{\frac{k}{2}-1} \prod_{i=1}^j \prod_{r=k-i+1}^{k-1} |(\sin \theta_r^{(i)})|^{r-1}$$

$$\iint_{U \times \mathcal{K}} e^{-\langle e, s \perp (e + \sum_{i=1}^j t_i K H H_i(e_k)) \Delta K H H_i(e_k) \rangle} \sqrt{t_i} \langle a_{\perp}(m_i), s \perp K H H_i(e_k) \rangle s^{2\beta} du(s) dK$$

(dK mesure de Haar sur \mathcal{K}).

Preuve : Noter qu'ici $x \mapsto s(x)$ a pour jacobien $\det T$ (en posant $s = \Pi(T^t T)$) soit encore $(\det ({}^t T T))^{1/2}$, c'est-à-dire $(\det s^*)^{1/2}$ que nous

notons $s^{* \frac{s(2\beta)}{2}} = s^\beta$.

Noter de plus que si dH est la mesure de Haar sur $O(k)$ et si $(dH)_{\mathcal{K}}$ dénote (provisoirement) la mesure de Haar sur \mathcal{K} , on a l'égalité, pour toute fonction intégrable f :

$$\int_{O(k)} f(H) dH = \int_{O(k)/\mathcal{K}} d\bar{H} \int_{\mathcal{K}} f(KH) (dK)_{\mathcal{K}}$$

(la dernière intégrale ne dépend de H que par sa classe d'équivalence \bar{H} ; pour la définition de $d\bar{H}$ voir [5] chapitre 15-18 par exemple).

THEOREME 10 :

Soit $f(t_1, \dots, t_j)$ la valeur de l'intégrale écrite au théorème 9, sous l'hypothèse nulle. Le théorème 4 reste valable et généralise le test de Pillai.

Preuve : La loi des μ_i s'écrit sous la forme $dM(\rho_i) d\sigma(\mu_{1i})$ avec

$$\rho_i = \|\mu_i\|, \quad \mu_{1i} = \frac{\mu_i}{\rho_i}.$$

La différentielle seconde étant calculée comme précédemment, on a :

$$E\left(\frac{\partial^2 (a_1(\mu_i'))}{\partial \rho_i \partial \rho_i} \Big| \rho_1, \dots, \rho_i \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i' \\ \frac{1}{k} \text{tr } A_{ii} \rho_i^2 & \text{si } i = i' \end{cases}$$

Le test conduit à rejeter H_0 si :

$$\sum_{i=1}^j \langle e, A_{ii} \rangle > C_1 \quad f$$

et le résultat s'obtient en explicitant A_{ii} .

VI - EXEMPLES ET CONTREXEMPLES

Pour être utilisé, ce théorème demande le calcul explicite de

$$f(t_1, \dots, t_j) = \int_{\mathcal{K}} \left(e + \sum_{i=1}^j t_i K(V_i) \Delta K(V_i) \right)^{\alpha - \rho\beta} dK$$

ce sont en fait des cas d'espèce.

Exemple 1 : Λ (donc Λ^{-1}) est diagonale. Il est facile de voir que la zone de rejet est :

$$\sum_{m=1}^k \frac{\sum_{i=1}^j x_{im}^2}{S_{mm} + \sum_{i=1}^j x_{im}^2} > C.$$

Exemple 2 : $\Lambda^{-1} \in \mathcal{M}_3^+$, et Λ^{-1} a un zéro en position (1,2). On a alors

$$\alpha = (0, 0, 1) \quad \beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \mathcal{K} = \{\text{identité}\}, \text{ et}$$

$$w^{\alpha - \rho\beta} = \left(w_{11} - \frac{w_{13}^2}{w_{33}} \right)^{\frac{\rho}{2}} \left(w_{22} - \frac{w_{33}^2}{w_{33}} \right)^{-\frac{\rho}{2}} w_{33}^{1 - \frac{\rho}{2}}.$$

Le calcul de f est immédiat.

Exemple 3 : On suppose de plus que les deux premiers éléments diagonaux de Λ^{-1} sont égaux. On calcule $\alpha = (0,1)$, $\beta = (1, \frac{1}{2})$ et \mathcal{K} est formé des rotations de type (1,2). De plus :

$$w^{\alpha-\rho\beta} = \left(\frac{w_{11} + w_{22}}{2} - \frac{w_{13}^2 + w_{23}^2}{2w_{33}} \right)^{-\rho} w_{33}^{1 - \frac{\rho}{2}} .$$

Cette expression étant invariante par \mathcal{K} , le calcul de f est immédiat encore. Noter que même dans l'exemple 1, la loi de la statistique de rejet ne peut être obtenue explicitement.

Contrexemples : Nous avons supposé en tête du chapitre V que \mathcal{P} était conservé par un sous groupe assez riche de transformations $u \rightsquigarrow {}^t g u g$. Par exemple, si \mathcal{P} est de dimension $\frac{k(k+1)}{2} - 1$, donné par l'équation $\langle u, w \rangle = 0$, cela revient à supposer que w a 2 valeurs propres (exactement) non nulles (et de signes opposés !).

Pour $k = 3$ comment aborder l'étude de ce problème pour \mathcal{P} donné, par exemple par $2 a_{11}^* = a_{22}^* + a_{33}^*$?

PNM_3^+ est-il encore homogène ? (En autorisant des transformations linéaires de R^5 dans R^5 autres que celles ci-dessus), c'est peu probable. Si oui, quelle est l'interprétation physique de ces transformations ?

