

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MICHEL EMERY

Équations différentielles stochastiques lipschitziennes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 40-43

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_40_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUATIONS DIFFERENTIELLES
STOCHASTIQUES LIPSCHITZIENNES

Michel EMERY

Université de Strasbourg

Cet exposé énonce, sans démonstrations, les résultats de deux articles à paraître dans le volume XIII du Séminaire de Probabilités de Strasbourg, consacrés à la stabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique très générale, l'équation de Doléans-Dade et Protter.

NOTATIONS

Ce sont celles du Cours sur les Intégrales Stochastiques de Meyer (volume X du Séminaire). Les données $\Omega, \underline{F}, P, (\underline{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifient les conditions habituelles, la tribu \underline{F} étant en outre supposée essentiellement séparable. Les processus sont en fait des classes de processus indistinguables; l'intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné X par rapport à une semimartingale M est notée $X \cdot M$:

$$(X \cdot M)_t = \int_{[0,t]} X_s dM_s .$$

DEUX ESPACES DE PROCESSUS ET LEURS TOPOLOGIES

On désigne par L^0 l'espace de toutes les variables aléatoires p.s. finies, par \underline{D} l'espace des processus adaptés à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche, et par \underline{SM} le sous-espace de \underline{D} constitué des semimartingales. Pour $X \in \underline{D}$, on note X_- le processus des limites à gauche de X et, si T est un temps d'arrêt, X^{T-} le processus X arrêté à $T-$:

$$X^{T-} = X I_{\llbracket 0, T \llbracket} + X_{T-} I_{\llbracket T, \infty \llbracket} .$$

Soit d_p une distance sur L^0 qui soit bornée ^{et invariante par translations} et qui définisse la topologie de la convergence en probabilité (par exemple

$$d_p(U, V) = E[\inf(1, |U-V|)] \quad).$$

On définit alors une distance d_{cp} sur \underline{D} par

$$d_{cp}(X, Y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} d_p(0, \sup_{0 \leq t \leq n} |X_t - Y_t|)$$

et une distance plus forte d_{sm} sur \underline{SM} par

$$d_{sm}(M, N) = \sup_{|X| \leq 1} d_{cp}(X \cdot M, X \cdot N) \quad ,$$

le sup portant sur tous les processus prévisibles bornés par 1.

Les espaces métriques (\underline{D}, d_{cp}) et (\underline{SM}, d_{sm}) sont alors complets, et leurs topologies respectives (que nous appellerons topologie de la convergence compacte en probabilité et topologie des semimartingales) ne dépendent pas du choix de d_p et sont invariantes lorsqu'on remplace P par une probabilité équivalente. Plus généralement, si Q est une probabilité absolument continue par rapport à P , les applications "identiques" ⁽¹⁾ de $\underline{D}(P)$ dans $\underline{D}(Q)$ et de $\underline{SM}(P)$ dans $\underline{SM}(Q)$ sont continues pour ces topologies. Ainsi définies, ces topologies sont peu maniables. Leur utilisation est facilitée par leur lien avec les espaces de Banach introduits ci-dessous:

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on appelle \underline{S}^p l'espace de Banach des processus $X \in \underline{D}$ dominés par une variable aléatoire de L^p (muni de la norme $\|X\|_{\underline{S}^p} = \left\| \sup_t |X_t| \right\|_{L^p}$). Toujours pour $1 \leq p \leq \infty$, on appelle \underline{H}^p l'espace de Banach des semimartingales $M = N + A$, où la martingale N et le processus à variation finie A sont tels que $[N, N]_{\infty}^{\frac{1}{2}}$ et A soient à variation totale dans L^p ; on le munit de la norme

$$\|M\|_{\underline{H}^p} = \inf_{M=N+A} \left\| [N, N]_{\infty}^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\infty} |dA_s| \right\|_{L^p} \quad .$$

Le théorème qui lie ces normes aux distances introduites plus haut est le suivant:

(1) Ces applications ne sont en général pas injectives; j'ignore en outre si la deuxième est surjective.

THEOREME. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient (X^n) une suite de processus de \underline{D} (respectivement \underline{SM}), X un processus de \underline{D} (respectivement \underline{SM}).

a) Si X^n tend vers X localement dans \underline{S}^p (respectivement \underline{H}^p), X^n tend vers X pour la distance d_{cp} (respectivement d_{sm}).

b) Si la suite X^n tend vers X pour d_{cp} (respectivement d_{sm}), on peut en extraire une sous-suite qui tend vers X localement dans \underline{S}^p (respectivement \underline{H}^p).

Dans cet énoncé, la notion de convergence localement dans \underline{S}^p ne doit pas être prise au sens usuel: nous disons qu'une suite X^n tend vers X localement dans \underline{S}^p s'il existe des temps d'arrêt T_k qui tendent en croissant vers l'infini tels que, pour tout k ,

- $X^{T_k^-}$ et, pour tout n , $(X^n)^{T_k^-}$ sont dans \underline{S}^p ,
- $(X^n)^{T_k^-}$ converge dans \underline{S}^p vers $X^{T_k^-}$;

de même pour \underline{H}^p .

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LIPSCHITZIENNES

Pour $a > 0$, on note $Lip(a)$ l'ensemble des applications \mathbb{F} de \underline{D} dans \underline{D} non anticipantes (pour tout temps d'arrêt T , pour tous X et Y de \underline{D} , $X^{T-} = Y^{T-}$ entraîne $(FX)^{T-} = (FY)^{T-}$) et a -lipschitziennes (pour tous X et Y de \underline{D} , $\sup_t |FX_t - FY_t| \leq a \sup_t |X_t - Y_t| \leq \infty$ p.s.). Par exemple F est dans $Lip(a)$ pour $FX_t(\omega) = f(\omega, t, X_t(\omega))$, où la fonction $f(\omega, t, x)$ est \mathbb{F}_t -mesurable en ω pour t et x fixés, càdlàg en t pour ω et x fixés, et a -lipschitzienne en x pour ω et t fixés.

On sait (Doléans-Dade, Protter) que, pour $H \in \underline{D}$, $F \in Lip(a)$ et $M \in \underline{SM}$, il existe un processus X et un seul dans \underline{D} qui vérifie l'équation différentielle stochastique

$$X = H + FX \cdot M \quad ;$$

il est clair que si H est une semimartingale, X en est aussi une.

Le principal résultat de cet exposé est le suivant:

THEOREME de stabilité. Les deux applications de $\underline{D} \times \text{Lip}(a) \times \underline{SM}$ dans \underline{D} et de $\underline{SM} \times \text{Lip}(a) \times \underline{SM}$ dans \underline{SM} définies par la résolution de l'équation

$$X = H + FX \cdot M$$

sont continues lorsque \underline{D} est muni de d_{cp} , $\text{Lip}(a)$ de la topologie de la convergence simple associée à d_{cp} , et \underline{SM} de d_{sm} .

En prenant des applications F constantes, on obtient le cas particulier suivant (qui admet, bien sûr, une démonstration directe):

COROLLAIRE. L'application de $\underline{D} \times \underline{SM}$ dans \underline{SM} qui à (X, M) associe $X \cdot M$ est continue.

La démonstration de ce théorème utilise le précédent pour se ramener à travailler dans les espaces de Banach \underline{S}^p et \underline{H}^p . La même méthode fournit la possibilité de résoudre l'équation par approximations successives:

THEOREME. Soient $H \in \underline{D}$, $F \in \text{Lip}(a)$, $M \in \underline{SM}$, X la solution de l'équation

$$X = H + FX \cdot M \quad .$$

Pour tout $Y^0 \in \underline{D}$, on définit une suite (Y^n) dans \underline{D} par la relation de récurrence $Y^{n+1} = H + FY^n \cdot M$. Alors $X - Y^n$ tend vers zéro pour d_{sm} (et a fortiori pour d_{cp}).

Ces deux derniers théorèmes s'étendent au cas d'un système d'équations différentielles; ils restent vrais lorsqu'on remplace la constante de Lipschitz a par une variable aléatoire \underline{F} -mesurable p.s. finie $a(\omega)$.

M. Emery
IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg-Cedex