

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

LUCIEN CHEVALIER

**Démonstration « atomique » des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 19-24

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1979\\_\\_67\\_17\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_19_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION "ATOMIQUE" DES INEGALITES DE BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY

Lucien CHEVALIER

Université de Grenoble

On désigne par  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé complet, et par  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  une famille croissante et continue à droite de sous tribus de  $\mathcal{F}$ . On suppose que  $\mathcal{F}_0$  contient tous les ensembles négligeables de  $\mathcal{F}$ , et que  $\mathcal{F} = \sup(\mathcal{F}_t)$ . Par "martingale", on entend "martingale locale cadlag".

Pour tout  $p > 0$ , on désigne par  $\mathcal{H}^p$  (resp.  $H^p$ ) l'espace des martingales  $X$  telles que  $\|X\|_{\mathcal{H}^p} = \|X_\infty^*\|_{L^p} < +\infty$  (resp.  $\|X\|_{H^p} = \|[X, X]_\infty^{1/2}\|_{L^p} < +\infty$ ). On se propose ici de montrer, sous certaines conditions, l'équivalence des normes ainsi définies (ou des métriques qui en tiennent lieu si  $p < 1$ ).

Pour simplifier, on se bornera à donner la démonstration dans le cas de martingales continues; elle est basée en partie sur la particularité qu'ont ces martingales d'admettre des "décompositions atomiques" (prop. 2 et 3), qui donnent immédiatement les inégalités visées pour  $0 < p \leq 1$ ; enfin, un lemme (" $H_{p/2} \subset \mathcal{H}_{p/2}$  implique  $H_p = \mathcal{H}_p$ ") donne les inégalités pour tout  $p > 0$ .

Dans un deuxième paragraphe, on indique brièvement d'autres résultats que les décompositions atomiques permettent d'obtenir.

L'idée des décompositions atomiques provient de [1].

I. Démonstration des inégalités dans le cas continu.

Définition 1. Soit  $p > 0$ ; une martingale continue  $a$  est un  $p$ -atome de 1ère catégorie s'il existe un temps d'arrêt  $T$  tel que

- (i)  $a_t = 0$  si  $t \leq T$ ;
- (ii)  $\|a_\infty^*\|_{L^p} \leq p(T < \infty)^{-1/p}$

Définition 2. La définition d'un p-atome de 2ème catégorie s'obtient en remplaçant dans la déf.1  $a_{\infty}^*$  par  $[a, a]_{\infty}^{1/2}$ .

Un des avantages des atomes est la

Proposition 1. Pour  $0 < p \leq 2$ , tout atome de toute catégorie a une "norme"  $\leq \sqrt{2}$  dans  $\mathcal{H}^p$  et  $H^p$ .

Démonstration : Il est trivial qu'un atome de 1ère (resp. 2ème) catégorie est dans la boule unité de  $\mathcal{H}^p$  (resp.  $H^p$ ); il reste donc à estimer, par exemple,  $E(a^{*p})$ , où  $a$  est un atome de 2ème catégorie. Soit  $T$  un temps d'arrêt associé à  $a$ ; on a :

$$E(a^{*p}) = E(a^{*p} \chi_{\{T < \infty\}}) \leq E^{p/2}(a^{*2}) (P(T < \infty))^{1-p/2} \text{ d'où,}$$

$$\text{comme } E(a_{\infty}^{*2}) \leq 2E(a_{\infty}^2) = 2E([a, a]_{\infty}), E(a_{\infty}^{*p}) \leq 2^{p/2} E^{p/2}([a, a]_{\infty}) (P(T < \infty))^{1-p/2}$$

$$\leq 2^{p/2} ((P(T < \infty))^{-1/p})^{p/2} (P(T < \infty))^{p/2} (P(T < \infty))^{1-p/2} = 2^{p/2}.$$

On en déduit assez facilement que, si  $(a^n)$  est une suite d'atomes (de 1ère catégorie par exemple), et  $(\lambda_n)$  une suite de  $l^p(\mathbb{Z})$ , alors la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a^n$  converge vers un élément de  $\mathcal{H}^p$ , pour la topologie de  $\mathcal{H}^p$ . On n'aura pas besoin de ce résultat ici; en revanche, on utilisera les réciproques suivantes :

Proposition 2 : Pour toute martingale (continue)  $X$  telle que  $\|X\|_{\mathcal{H}^p} < +\infty$ , il existe une suite  $(a^n)$  d'atomes de 1ère catégorie et une suite  $(\lambda_n)$  de scalaires telles que :

- (i) la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a^n$  converge vers  $X$  dans  $\mathcal{H}^p$ ;
- (ii) pour tout  $t$ , la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a_t^n$  converge p.s. vers  $X_t$ ;
- (iii)  $\|(\lambda_n)\|_{l^p(\mathbb{Z})} \leq C_p \|X\|_{\mathcal{H}^p}$ , où  $C_p$  ne dépend que de  $p$ .

Proposition 3. Pour toute martingale (continue)  $X$  telle que  $\|X\|_{H^p} < +\infty$ , il existe une suite  $(b^n)$  d'atomes et une suite  $(\mu_n)$  de scalaires telles que :

- (i) la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n b^n$  converge vers  $X$  dans  $H^p$ ;
- (ii) pour tout  $t$ , la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n b_t^n$  converge p.s. vers  $X_t$ ;
- (iii)  $\|(\mu_n)\|_{l^p(\mathbb{Z})} \leq D_p \|X\|_{H^p}$ , où  $D_p$  ne dépend que de  $p$ .

Les démonstrations sont voisines; bornons-nous à établir la prop.3 :

Soit  $X \in H^P$ ; posons, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} T_n &= \text{Inf} \left\{ t, [X, X]_{\infty}^{1/2} > 2^n \right\}; \\ \mu_n &= 2^{n+1} P(T_n < \infty)^{1/P} \\ b^n &= (\mu_n)^{-1} (X^{T_{n+1}} - X^{T_n}) \text{ si } \mu_n \neq 0 \\ &= 0 \text{ si } \mu_n = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que les  $b^n$  sont des atomes associés aux temps d'arrêt  $T_n$ ; montrons que les assertions (i) et (ii) sont vérifiées : soient  $P$  et  $Q$  deux entiers  $\geq 0$ ; on a

$$X - \sum_{-P}^Q \mu_n b^n = (X - X^{T_{Q+1}}) + X^{T_{-P}}.$$

Puisque  $[X, X]_{\infty} < \infty$  p.s., on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$  p.s.; donc, pour tout  $t$ ,  $X_t - X_t^{T_{Q+1}}$  tend vers 0 p.s. quand  $Q$  tend vers  $+\infty$ , d'où une moitié de (i); d'autre part,  $[X - X^{T_{Q+1}}, X - X^{T_{Q+1}}]_{\infty}^{P/2} = ([X, X]_{\infty} - [X, X]_{T_{Q+1}})^{P/2}$  tend p.s. vers 0 quand  $Q$  tend vers  $+\infty$ , en restant  $\leq [X, X]_{\infty}^{P/2}$ , d'où une moitié de (i). Enfin, on observe que, pour tout  $t$ , on a  $[X^{T_{-P}}, X^{T_{-P}}]_t \leq 2^{-P}$ , ce qui permet de compléter facilement la preuve de (i) et (ii). D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mu_n|^P &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{(n+1)P} P(T_n < \infty) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{(n+1)P} P([X, X]_{\infty}^{1/2} > 2^n) \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2^P)^n P([X, X]_{\infty}^{P/2} > (2^P)^n) \\ &\leq (D_P)^P E([X; X]_{\infty}^{P/2}). \end{aligned}$$

Corollaire 1 : Pour tout  $p \leq 1$ ,  $H^P \subset \mathcal{H}^P$ .

En effet, soit  $X \in H^P$ ; on lui applique la prop.3; d'après (ii) on a, avec des notations évidentes:

$$(X_{\infty}^*)^P \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mu_n|^P (b_{\infty}^{n*})^P. \text{ En prenant les}$$

espérances et en appliquant successivement la prop.1 et la prop.3(iii) on obtient  $\|X\|_{\mathcal{H}^P} \leq \sqrt{2} D_P \|X\|_{H^P}$ .

On pourrait procéder de la même manière, la prop. 2 remplaçant la prop. 3, pour obtenir l'inégalité en sens inverse (pour  $p \leq 2$ ); comme on n'obtiendrait pas ainsi les inégalités pour tout  $p > 0$ , on préfère utiliser le

Lemme : Soit  $p > 0$ ; s'il existe  $A_{p/2} > 0$  tel que  $\|X\|_{\mathcal{H}^{p/2}} \leq A_{p/2} \|X\|_{H^{p/2}}$  pour toute martingale (continue) X, alors il existe  $A_p$  et  $B_p > 0$  tels que  $B_p \|X\|_{H^p} \leq \|X\|_{\mathcal{H}^p} \leq A_p \|X\|_{H^p}$  pour toute martingale (continue) X.

De ce résultat et du cor.1 découlent immédiatement les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy pour tout  $p > 0$ .

Démonstration du lemme :

Grâce à un argument d'arrêt, on peut se limiter aux martingales de  $\mathcal{H}^p \cap H^p$ . Soit X une telle martingale; la martingale  $Y = X^2 - [X, X]$  vérifie l'inégalité :

(A)  $\|Y\|_{H^{p/2}} \leq 2 \|X\|_{\mathcal{H}^p} \|X\|_{H^p}$ ; en effet, pour tout  $t \geq 0$ ,  
 $[Y, Y]_t = 4 \int_0^t X_s^2 d[X, X]_s \leq 4 X_t^{*2} [X, X]_t$ ; en élevant les deux membres à la puissance  $p/4$ , en les intégrant et en appliquant l'inégalité de Schwartz au second, on obtient l'inégalité (A).

Pour établir l'existence de  $A_p$ , on écrit, pour tout  $t \geq 0$ ,  
 $|X_t|^p = (X_t^2)^{p/2} \leq 2^{p/2} ([X, X]_t^{p/2} + |Y_t|^{p/2})$ , et par suite :  
 $(X_\infty^*)^p \leq 2^{p/2} ([X, X]_\infty^{p/2} + (Y_\infty^*)^{p/2})$ ; en prenant les espérances, en utilisant successivement l'hypothèse et l'inégalité (A), (et la finitude de toute les "normes"), on arrive à l'inégalité

$$\|X\|_{\mathcal{H}^p}^p - 2^{p/2} (\|X\|_{H^p}^p + (A_{p/2})^{p/2} 4^{p/4} \|X\|_{\mathcal{H}^p}^{p/2} \|X\|_{H^p}^{p/2}) \leq 0.$$

En considérant le premier membre comme un trinôme du second degré par rapport à  $\|X\|_{\mathcal{H}^p}^{p/2}$ , on obtient finalement

$$\|X\|_{\mathcal{H}^p} \leq 2^{4/p} (4 A_{p/2} + \sqrt{2}) \|X\|_{H^p}. \text{ La preuve de l'existence de } B_p \text{ est similaire.}$$

tence de  $B_p$  est similaire.

II. Autres exemples d'applications des décompositions atomiques

= Espaces  $H^p$  et  $\mathcal{H}_g^p$  de martingales régulières.

On désigne par  $H_g^p$  l'espace des martingales  $X$  telles que  $\|X\|_{H_g^p} < +\infty$ , où cette quantité désigne la borne inférieure des nombres  $(E(A^p))^{1/p}$ ,  $A$  parcourant l'ensemble des processus prévisibles qui sont  $\geq [X, X]^{1/2}$ . On définit de la même manière l'espace  $\mathcal{H}_g^p$ .

En adaptant convenablement les méthodes du § I, on peut montrer que les espaces  $H_g^p$  et  $\mathcal{H}_g^p$  sont isomorphes (résultat dû, je crois, à P.A. MEYER).

- Espace  $H^p$  construit avec le processus prévisible ,

Certains des résultats de M. PRATELLI (Cf. [2]) peuvent s'obtenir par des décompositions atomiques, avec parfois un gain en généralité.

- Dual de  $H^p$ , pour  $p \leq 1$ .

Considérons ici le cas des martingales dyadiques, et appelons  $bmo_p$  l'espace des martingales  $Y$  fermées dans  $L^2$  telles qu'il existe  $C$  vérifiant  $\|Y_\infty - Y_T\|_\infty \leq C p(T < \infty)^{1/p}$  pour tout temps d'arrêt  $T$ , normé comme on l'imagine. En généralisant les méthodes de [I], on voit que le dual de  $H^p$  est isomorphe à  $bmo_p$ , espace qui a une signification géométrique simple : il est isomorphe au sous-espace de  $L^2$  des fonctions  $f$  telles qu'il existe  $C$  vérifiant, pour tout intervalle dyadique  $I$ ,  $\int_I |f - \frac{1}{|I|} \int_I f| \leq C |I|^{1/p}$ , équipé de la "norme"  $\|f\| = \inf \{ C \dots \}$ . Ce dernier espace est lui-même isomorphe, si  $p < 1$ , à la classe de Lipschitz  $Lip(\frac{1}{p} - 1)$ . On retrouve ainsi une partie des résultats de C. HERZ (Cf [III]).

Références :

[I] A. BERNARD et B. MAISONNEUVE : "Decomposition atomique de martingales de la classe  $H^1$ ", Séminaire de Probabilités XI, Lecture notes 581, Springer Verlag (1977).

[II] M. PRATELLI "Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable". Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes 511, Springer Verlag (1976).

[III] C. HERZ " $H^p$ -spaces of martingales,  $0 < p \leq 1$ ". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.28, 189-205 (1974).

Lucien CHEVALIER

Institut Fourier

Mathématiques Pures

B.P. 116

38402 SAINT MARTIN D'HERES

---:---:---:---:---:---:---:---