ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAOLO BALDI

Sur la classification des groupes récurrents

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 12-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_12_0>

SUR LA CLASSIFICATION DES GROUPES RECURRENTS

Paolo BALDI

Université de Pise, Italie

-:-:-:-:-:-

Soit G un groupe L C D , V un voisinage de l'origine qui engendre le groupe, m la mesure de Haar de G . On dira che G est à croissance polynomiale d'exposant $\leq \alpha$ si il existe $c > 0$ telle que

$$m(V^n) \leq c\, n^{\alpha} .$$

On dira que G est à croissance exponentielle s'il existent $c > 0$ et $\rho > 1$ tels que

$$m(V^n) \geq c\, \rho^n$$

L'ideé est d'utiliser la notion de croissance pour déterminer quand est-ce qu'un groupe est récurrent; soit on imagine que plus un groupe a une grande croissance, moins il est récurrent. Plus précisement:

Conjecture. Un groupe L C D est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale d'exposant ≤ 2 .

A l'heure actuelle on ne sait pas resoudre cette conjecture en toute généralité, mais on sait la démontrer dans un cadre assez vaste:

Théorème 1. Soit G une groupe de Lie connexe. Alors il est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale d'exposant ≤ 2.

On va donner dans la suite une idée des différentes étapes qui menent à la démonstration du théorème 1.

On donnera d'abord des résultats de structure qui permettront de réduire le problème à l'étude de certains groupes bien précis, qu'on traitera dans la deuxième partie.

1.

Comme on sait qu'un groupe récurrent est de type R ([6]), il n'est pas réstrictif de ne considérer que ce cas (on rappelle qu'un groupe de Lie est de type R si les valeurs propres de l'application adjointe sont toutes de module égal à 1).

Soit

$$G = R\,S$$

une décomposition de Levy de G . Si la partie semisimple S n'est pas compacte G ne serait pas moyennable et donc transitoire et à croissance exponentièlle ([6]). Si S est compact deux cas se présentent suivant que S est distingué dans G ou pas.

Proposition 1.1

Soit G un groupe de Lie connexe de type R tel que dans une décomposition de Levy la partie semisimple ne soit pas distinguée. Alors G possède un quotient qui est le produit semidirect $R^d \times_\sigma K$ $(d \geq 3)$ de R^d et d'un groupe K de rotations qui opère de manière irréductible sur R^d .

Démonstration: voir [6] , chap. V .

Si par contre S est distingué dans G , on peut passer à considerer $G/_S$ qui, est un groupe résoluble, sans rien changer ni à la croissance ni à la récurrence du groupe .

Dans la suite on désignera par

G_2 = le groupe des déplacements du plan

$\tilde{G}_2$ = le revêtement de G_2 , soit un groupe dont les éléments sont du type (z,x) $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ avec l'opération

$$(z,x)\cdot(z',x') = (z+e^{ix}z',x+x')$$

H_1 = le prémier groupe de Heisenberg, soit R^3 muni de l'opération

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z'+xy')$$

Δ = le groupe diamant soit le produit semidirect $H_1 \times_\sigma SO(2)$ où $SO(2)$ opère par rotations sur les coordonnées x,y .

Proposition 1.2

Soit G un groupe de Lie connexe resoluble de type R dont le quotient par le sousgroupe compact distingué maximum est $\neq \{0\}$, R, R^2, G_2 ; alors si G est nilpotent il admet H_1 ou R^3 comme quotient . Si G n'est pas nilpotent il admet comme quotient Δ , $\tilde{G}_2$ ou le produit semidirect $R^d \times_\sigma A$ $(d \geq 3)$ de R^d et d'un groupe compact A abélien de rotations de R^d .

Démonstration: voir [6] , chap. V .

Comme le passage au quotient par un sousgroupe compact ne change pas le croissance, si G est resoluble et à croissance polynomiale d'exposant

≤ 2, le quotient par le sousgroupe compact normal maximum ne peut donner comme résultat que $\{0\}$, R, R^2, G_2 , comme les autres groupes qui figurent dans la proposition 1.2 sont à croissance polynomiale d'ordre 3, sauf H_1, et Δ qui sont d'ordre 4 . Par contre la proposition 1.1 montre que si la partie semisimple n'est pas distinguée dans G il existe un quotient qui est isomorphe au produit semidirect $R^d \times_\sigma K$ $(d \geq 3)$ où K est un sousgroupe de SO(d) qui opère de façon irréductible; un tel groupe est à croissance polynomiale d'ordre 3 , et la croissance de G est donc d'ordre ≥ 3 .

Pour terminer la démonstration du théorème , il reste donc à prouver que R^3 , H_1, Δ , $\tilde{G}_2$, $R^d \times_\sigma K$, $R^d \times_\sigma A$ sont transitoires.

2.

Le fait que R^3 est transitoire est bien connu depuis longtemps. Pour les autres cas :

Proposition 2.1.

Soit G un des groupes $\tilde{G}_2$, H_1, Δ , $R^d \times_\sigma K$ $R^d \times_\sigma A$, μ une loi de probabilité sur G , à support compact et symétrique. Alors μ est transitoire.

Démonstration: voir [7] , [8] , [9] , [6] .

L'idée générale de la démonstration de la proposition 2.1 est la suivante. On construit d'abord une fonction barrière, soit une fonction f telle que

$$f < 1$$

$$\lim_{g \to \partial} f(g) = 1$$

$$\mu * f(g) \geq f(g)$$

pour tout g hors d'un compact K(∂ désigne le point à l'infini dans la compactification d'Alexandroff de G).

On voit deuxièmement que si K' est un compact contenant K , $z_n^g = X_n X_{n-1} \ldots X_1 g$, l'état de la marche au temps n et $T_{K'}^g$ le prémier temps d'entrée dans K' en partant de g ,

$$f(z^g_{n \wedge T^g_{K'}})$$

est une surmartingale. Donc:

$$f(g) \leq E\left[f(z^g_{n \wedge T^g_{K'}})\right] = E\left[f(z^g_n);\ n < T^g_{K'}\right] + E\left[f(z^g_{T^g_{K'}};\ n \geq T^g_{K'}\right] \leq$$

$$\leq P(n \leq T^g_{K'}) + \xi\, P\left[n > T^g_{K'}\right] = 1 - (1-\xi)P(n > T^g_{K'})$$

où $\xi = \sup_{g \in K'} f(g) < 1$

A la limite pour $n \longrightarrow \infty$ on a donc

(1) $$P(T^g_{K'} < \infty) \leq \frac{1 - f(g)}{1 - \xi}$$

qui pour g assez grand est < 1 .

La proposition suivante permet de conclure ([2]):

Proposition 2.2

Un groupe G est transitoire si et seulement si sont transitoires les marches symètriques à support compact.

Il est important de remarquer que dans les cas G_2 , H_1, et $R^d \times_\sigma A$ il existe une autre méthode de démonstration de la transience tout à fait différente et qui n'a pas besoin de passer par l'intermediaire de la proposition 2.2. ([5] , [6]).

3.

Quelques questions ouvertes.

1. Il est traditionnel d'étudier en même temps la transience et le renouvellement des marches aléatoires. Dans le cadre des groupes de Lie connexes de type R on sait que si $G = R \times_\sigma A$, $\tilde{G}_2$ ou H_1 la seule valeur d'adhérence du potentiel à l'infini est la mesure nulle ([5], [6]) . Cela est certainement vrai aussi pour les autres cas, mais pour $R^d \times_\sigma K$ où Δ on est encore obbligés de faire des hypothèses de moments ([7] , [8] , [9]) ou d'etalement([6]) pour μ . Il semble raisonnable un résultat analogue à la proposition 2.2 pour le renouvellement.

2. Le théorème 1 a été extendu à une classe plus vaste de groupes ([6]) mais, notamment pour les groupes discrets,le théorème 1 n'a pas d'analogue. La question essentielle serait d 'avoir des bons résultats de structure.

Bibliographie

1 *R. Azencott* - "Espaces de Poisson des groupes localement compacts- Springer L.N. n. 148 .

2 *P. Baldi, J. Peyrière, N. Lohoué* - à paraître C.R.A.S.

3 *P. Crepel* - "Marches aléatoires sur les déplacements du plan" - C.R.A.S., t. 278, (1er Avril 1974) série A, pag. 961 .

4 *Y. Derriennic* , *Y. Guivarc'h* - "Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables" - C.R.A.S. t, 277, (1er Oct. 1973),série A, pag. 613 .

5 *Y. Guivarc'h, M. Keane* - "Transience des marches aléatoires sur les groupes nilpotents" - Asterisque N. 4, (1973), pag. 27.

6 *Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette* - "Marches aléatoires sur les groupes de Lie " - à paraître L.N. Springer .

7 *B. Roynette* - "Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de l'espace".

8 *B. Roynette* - "Récurrence et transience des groupes de Lie résolubles connexes"- à paraitre.

9 *B. Roynette, M. Sueur* - "Marches aléatoires sur un groupe nilpotent ". Z.W. 30,(1974), p. 25-34 .