

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. NUALART RODON

M. SANZ SOLE

**Intégrales stochastiques par rapport au processus de
Wiener à deux paramètres**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 89-99

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_89_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTEGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT AU PROCESSUS DE WIENER

A DEUX PARAMETRES

D. NUALART RODON, UNIVERSITE DE TOULOUSE

M. SANZ SOLE, UNIVERSITE DE BARCELONE

Nous développons ici le calcul différentiel stochastique au sens d'Itô par rapport au processus de Wiener à deux paramètres $W=\{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ celui-ci étant défini comme un processus Gaussien, à moyenne nulle et fonction de covariance $E(W_z \cdot W_{z'}) = (x \wedge x')(y \wedge y')$, où $z=(x,y)$ et $z'=(x',y')$.

On présente, dans la Section 1, plusieurs conditions de martingales qu'on peut imposer aux fonctions aléatoires à deux paramètres, d'après les idées de Cairoli et Walsh [1]; et on étudie après, dans la Section 2, les diverses intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, qui nous seront nécessaires pour en déduire des formules de différentiation stochastique présentées dans la Section 3.

1. Propriété de martingale pour les fonctions aléatoires à deux paramètres.

Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on considère une suite croissante $\{\mathcal{A}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ de sous- σ -algèbres de $\mathcal{A}$, par rapport à l'ordre partiel de $\mathbb{R}_+^2$:

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

On dira qu'un processus $X = \{X_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est $\mathcal{A}_z$ -adapté si X_z est $\mathcal{A}_z$ -mesurable pour tout z .

Définition 1.1. Un processus $X = \{X_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale par rapport à l'ordre partiel si X est intégrable, $\mathcal{A}_z$ -adapté et

$$E\{X_{z'} / \mathcal{A}_z\} = X_z \quad \forall \quad z \leq z'.$$

D'autre part, on peut introduire la notion de martingale comme extension de celle de processus à accroissements indépendants. Rappelons qu'un processus $X = \{X_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est à accroissements indépendants si pour toute famille de rectangles $\Delta_i = (x_i, x_i'] \times (y_i, y_i']$ deux à deux disjoints, les accroissements $X(\Delta_i) = X_{(x_i', y_i')} - X_{(x_i', y_i)} - X_{(x_i, y_i)} + X_{(x_i, y_i)}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Le processus de Wiener à deux paramètres en est un exemple.

X étant un processus intégrable, on peut donner les définitions suivantes:

Définition 1.2. X est une martingale si X est $\dot{\mathcal{A}}_z$ -adapté et

$$E\{X(\Delta) / \mathcal{A}_z\} = 0,$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta \cap \mathcal{A}_z = \emptyset$, où $\mathcal{A}_z = [0, x) \times [0, y)$ si $z = (x, y)$.

Définition 1.3. X est une i-martingale ($i=1, 2$) si X est $\mathcal{A}_z^i$ -adapté

(où $\mathcal{A}_z^1 = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{A}_{(x, t)}$ et $\mathcal{A}_z^2 = \bigvee_{s \geq 0} \mathcal{A}_{(s, y)}$ si $z = (x, y)$), et

$$E\{X(\Delta) / \mathcal{A}_z^i\} = 0,$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta \cap \mathcal{A}_z^i = \emptyset$, où $\mathcal{A}_z^1 = [0, x) \times \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{A}_z^2 = \mathbb{R}_+ \times [0, y)$ si $z = (x, y)$.

Définition 1.4. X est une martingale forte si X est A_z -adapté et

$$E\{X(\Delta) / A_z^1 V A_z^2\} = 0$$

pour tout rectangle Δ tel que $\Delta \cap (A_z^1 \cup A_z^2) = \emptyset$.

Alors, on peut vérifier facilement les propriétés suivantes (voir [1]) :

1. Tout processus X à accroissements indépendants, nul sur les axes et à moyenne constante est une martingale forte si on prend comme A_z la σ -algèbre générée par les variables $X_\alpha, \alpha \leq z$.

2. X est une martingale si et seulement si X est 1 et 2-martingale, et ceci entraîne la propriété de martingale par rapport à l'ordre partiel si $\{X_{(x,0)}, A_{(x,0)}, x \geq 0\}$ et $\{X_{(0,y)}, A_{(0,y)}, y \geq 0\}$ sont des martingales à un paramètre.

3. Réciproquement, toute martingale par rapport à l'ordre partiel est une martingale si les σ -algèbres A_z^1 et A_z^2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à A_z .

Dorénavant, on supposera toujours que A_z est la σ -algèbre générée par les variables $W_\alpha, \alpha \leq z$, où $W = \{W_z, z \in R_+^2\}$ est un processus de Wiener à deux paramètres, et alors la propriété de martingale équivaut à celle de martingale par rapport à l'ordre partiel.

Cependant, il faut la définition 1.2 pour construire l'intégrale stochastique par rapport à une martingale quelconque.

2. Intégrales stochastiques.

Soit $T = [0,1]^2$ et $W = \{W_z, z \in T\}$ un processus de Wiener à deux paramètres.

Nous savons (voir [2],[3]) que pour un processus $\phi = \{\phi_z, z \in T\}$ tel que

- (a) $\phi(z, \omega)$ est $B \otimes A$ -mesurable, où B désigne la tribu des Boréliens de T,
- (b) ϕ est A_z -adapté et
- (c) $\int_T E(\phi_t^2) dt < \infty$,

on peut définir l'intégrale stochastique de premier type

$$I_1(\phi) = \int_T \phi_z dW_z,$$

qui suppose une généralisation immédiate de l'intégrale d'Itô et satisfait les propriétés:

- (i) isométrie: $E\{I_1(\phi)I_1(\psi)\} = \int_T E\{\phi_z \psi_z\} dz$, et
- (ii) $\{I_1(\phi \cdot 1_{A_z}), z \in T\}$ est une martingale forte.

Le problème de représentation de toute martingale relative à la suite de σ -algèbres $\{A_z, z \in T\}$ sous la forme d'intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, a obli-gé à E. Wong dans [3], à introduire un deuxième type d'intégrale stochastique:

Pour tout processus $\psi = \{\psi(z, z'), (z, z') \in T \times T\}$ tel que

- (a) $\psi(z, z', \omega)$ est $B \otimes A$ -mesurable,
- (b) $\psi(z, z')$ est $A_{z \vee z'}$ -mesurable, où $z \vee z' = (x \vee x', y \vee y')$ et
- (c) $\int_T \int_T E\{\psi(z, z')^2\} dz dz' < \infty$,

on définit l'intégrale de deuxième type

$$I_2(\psi) = \int_T \int_T \psi(z, z') dW_z dW_{z'},$$

dont l'idée est de prendre la restriction à l'ensemble

$$G = \{(z, z') \in T \times T / z \text{ et } z' \text{ sont non ordonnés}\}$$

de l'intégrale stochastique double au sens d'Itô (voir [4]).

Pour développer le calcul différentiel stochastique à deux paramètres, on doit considérer d'autres types d'intégrales stochastiques.

Pour tout processus $\phi = \{\phi_z, z \in T\}$ tel que

- (a) $\phi(z, \omega)$ est $B \otimes A$ -mesurable,
- (b) ϕ est A_z -adapté et
- (c) $\int_T E(\phi_z^2) x y dz < \infty$,

on peut définir une simplification de l'intégrale de deuxième type,

$$\tilde{I}_2(\phi) = \int_T \phi_z d_1 W_z d_2 W_z.$$

En effet, si ϕ est simple, c'est à dire, s'il existe une par-tition de T $\{\Delta_v\}_{v=1, \dots, k}$, $\Delta_v = [x_v, x'_v) \times [y_v, y'_v)$ telle que

$$\phi = \sum_{v=1}^k \phi_v \cdot 1_{\Delta_v}, \text{ on pose:}$$

$$\tilde{I}_2(\phi) = \sum_{v=1}^k \phi_v [W(x_v, y'_v) - W(x_v, y_v)] [W(x'_v, y_v) - W(x_v, y_v)],$$

et on prolonge cette définition par la méthode usuelle de passage à la limite en moyenne quadratique.

Cette intégrale vérifie les propriétés suivantes:

- (i) isométrie: $E\{\tilde{I}_2(\phi)\tilde{I}_2(\phi')\} = \int_T E\{\phi_z \phi'_z\} y dz$,
- (ii) $\{\tilde{I}_2(\phi \cdot 1_{A_z}), z \in T\}$ est une martingale et
- (iii) si on écrit $\psi(z, z') = \phi(z \vee z')$, alors $2\tilde{I}_2(\phi) = I_2(\psi)$.

Il faut aussi introduire les intégrales stochastiques mixtes:

Pour tout processus $\phi = \{\phi_z, z \in T\}$ tel que

- (a) $\phi(z, \omega)$ est $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -mesurable,
- (b) ϕ est $\mathcal{A}_z^1$ -adapté et
- (c) $\int_T E(\phi_z^2) y dz < \infty$,

on construira l'intégrale

$$\tilde{I}_3(\phi) = \int_T \phi_z d_1 W_z dy,$$

en prenant pour les processus simples la définition

$$\tilde{I}_3(\phi) = \sum_{v=1}^k \phi_{y_v} [W(x'_v, y_v) - W(x_v, y_v)] (y'_v - y_v).$$

On a les propriétés suivantes:

- (i) calcul comme une intégrale itérée:

$$\tilde{I}_3(\phi) = \int_0^1 \left[\int_0^1 \phi(x, y) d_1 W(x, y) \right] dy,$$

- (ii) isométrie:

$$E\{\tilde{I}_3(\phi)^2\} = 2 \int_T \int_0^y E\{\phi_z \phi_{(x, \eta)}\} d\eta dz \leq \int_T E\{\phi_z^2\} y dz \text{ et}$$

- (iii) $\{\tilde{I}_3(\phi \cdot 1_{A_z}), z \in T\}$ est une 1-martingale.

De la même façon on peut construire

$$\tilde{I}_4(\phi) = \int_T \phi_z d_2 W_z dx.$$

Si ϕ est un processus tel qu'on peut définir toutes les intégrales $I_1(\phi)$, $\tilde{I}_2(\phi)$, $\tilde{I}_3(\phi)$, $\tilde{I}_4(\phi)$, alors la deuxième est orthogonale aux autres et on peut vérifier les égalités suivantes:

$$E\{\tilde{I}_3(\phi) I_1(\phi)\} = \int_T \int_0^y E\{\phi_z \phi_{(x, \eta)}\} d\eta dz,$$

$$E\{\tilde{I}_4(\phi) I_1(\phi)\} = \int_T \int_0^x E\{\phi_z \phi_{(\xi, y)}\} d\xi dz,$$

$$E\{\tilde{I}_3(\phi) \tilde{I}_4(\phi)\} = 1/2 \int_T \int_T E\{\phi_z \phi_{z'}\} \cdot 1_G(z, z') dz dz'.$$

Les conditions plus faibles d'intégrabilité d'un processus :

$$\int_T \phi_z^2 dz < \infty, \int_T \phi_z^2 xy dz < \infty, \int_T \phi_z^2 x dz < \infty, \int_T \phi_z^2 y dz < \infty, \text{ p.s. },$$

qui entraînent des définitions des intégrales au moyen de la convergence en probabilité, et les intégrales stochastiques sur tout le domaine R_+^2 , peuvent être introduites de la façon habituelle.

3. Formule de différentiation.

D'abord on peut établir la suivante formule de différentiation pour le processus

$$X = \{ X_z = f(W_z, z) - f(W_{(x,0)}, x, 0) - f(W_{(0,y)}, 0, y) + f(W_{(0,0)}, 0, 0), z = (x, y) \in T \},$$

où $f(u, x, y)$, $u \in R$, $(x, y) \in T$ est une fonction réelle.

Théorème 3.1. Si la fonction f admet les dérivées partielles continues

$$\frac{\partial^4 f}{\partial u^4}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial u^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial u^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

on a pour tout $z \in T$:

$$X_z = M(z) + M_1(z) + M_2(z) + B(z),$$

où

$$M(z) = \int_{A_z} f'_u(W_\alpha, \alpha) dW_\alpha + \int_{A_z} f''_{uu}(W_\alpha, \alpha) d_1 W_\alpha d_2 W_\alpha, \quad \alpha = (\xi, \eta) \in T,$$

$$M_1(z) = \int_{A_z} D_2(f'_u)(W_\alpha, \alpha) d_1 W_\alpha d\eta, \quad ,$$

$$M_2(z) = \int_{A_z} D_1(f'_u)(W_\alpha, \alpha) d_2 W_\alpha d\xi, \quad ,$$

$$B(z) = \int_{A_z} (D_1 \circ D_2)(f)(W_\alpha, \alpha) d\alpha, \quad ,$$

étant D_1 et D_2 les opérateurs différentiels

$$D_1 = \frac{1}{2} y \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = \frac{1}{2} x \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à un paramètre et de faire un passage à la limite au sens de la convergence en probabilité, en prenant une suite de partitions de T , dont le diamètre tend vers zéro. $\square$

Remarquons que le processus $M = \{M(z), z \in T\}$ est une martingale et le processus $M_i = \{M_i(z), z \in T\}$ ($i=1, 2$) est une i -martingale, tandis que $B(z)$ a ses trajectoires absolument continues p.s. .

En conséquence, si $D_2(f)=0, D_1(f)=0$, ou $D_1(f)=D_2(f)=0$, le processus X est respectivement une 1-martingale, une 2-martingale,

En généralisant, on peut considérer, comme extension de la notion de semimartingale à un paramètre, un processus $X=\{X_z, z \in T\}$ admettant une décomposition de la forme

$$X_z = M(z) + M_1(z) + M_2(z) + B(z)$$

avec les conditions suivantes:

$\{M(z), z \in T\}$ est une martingale de carré intégrable,
 $\{M_1(z), z \in T\}$ est une 1-martingale A_z -adaptée et pour tout $x \in [0,1]$ fixé, $\{M_1(x,y), y \in [0,1]\}$ a ses trajectoires absolument continues avec dérivée $N_1(x,y)$ telle que $\int_0^y E(N_1(x,\eta)^2) d\eta < \infty$,
 $\{M_2(z), z \in T\}$ est une 2-martingale A_z -adaptée et pour tout $y \in [0,1]$ fixé, $\{M_2(x,y), x \in [0,1]\}$ a ses trajectoires absolument continues avec dérivée $N_2(x,y)$ telle que $\int_0^x E(N_2(\xi,y)^2) d\xi < \infty$,
 $\{B(z), z \in T\}$ est à trajectoires absolument continues.

On se pose d'abord le problème d'exprimer le processus X sous forme d'intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres.

Le théorème de représentation de Wong (voir [3]) fournit deux processus uniques $\phi_z, \psi(z,z')$ I_1 -intégrable et I_2 -intégrable respectivement, et tels que

$$M(z) = \int_{A_z} \phi_\alpha dW_\alpha + \int_{A_z} \int_{A_z} \psi(\alpha, \alpha') dW_\alpha dW_{\alpha'} .$$

Pour le processus $M_1(z)$ on a obtenu le résultat suivant:

Proposition 3.1. Il existe un processus unique $\Gamma_1(\alpha, \eta')$, où $\alpha = (\xi, \eta) \in T, \eta' \in [0, \eta]$, avec les propriétés:

- (a) $\Gamma_1(\alpha, \eta', \omega)$ est $B' \otimes A$ -mesurable, où B' désigne les Boréliens de $T' = \{(\alpha, \eta') / \alpha \in T, \eta' \in [0, \eta]\}$.
- (b) $\Gamma_1(\alpha, \eta')$ est A_α -mesurable, et
- (c) $\int_{A_z} \int_0^\eta E(\Gamma_1(\alpha, \eta')^2) d\eta' d\alpha < \infty$ pour chaque $z \in T$,

tel que

$$M_1(z) = \int_{A_z} \int_0^\eta \Gamma_1(\alpha, \eta') dW_{(\xi, \eta')} d\eta .$$

Remarque: Cette intégrale mixte qu'on vient d'introduire, peut

être définie pour les processus $\Gamma_1(\alpha, \eta')$ vérifiant (a), (b), (c) comme une intégrale itérée:

$$I_3(\Gamma_1) = \int_0^Y \int_{A_z} A(x, \eta) \Gamma_1((\xi, \eta), \eta') dW_{(\xi, \eta')} d\eta ,$$

et satisfait les propriétés:

(i) si $\Gamma_1(\alpha, \eta') = \Gamma_1(\alpha)$ ne dépend ^{pas} de η' , alors $I_3(\Gamma_1) = \tilde{I}_3(\Gamma_1)$,

(ii) isométrie:

$$E(I_3(\Gamma_1)^2) = 2 \int_{A_z} \int_0^\eta \int_0^{\eta_1} E(\Gamma_1((\xi, \eta), \eta') \Gamma_1((\xi, \eta_1), \eta')) d\eta' d\eta_1$$

$$d\xi d\eta \leq \int_{A_z} \int_0^\eta E(\Gamma_1(\alpha', \eta)^2) d\eta' d\alpha ,$$

(iii) $\{I_3(\Gamma_1 \cdot 1_{A_z}(\alpha)), z \in T\}$ est une 1-martingale.

Démonstration. D'après Wong (voir [3]), toute variable $Y \hat{A}_z$ -mesurable et de carré intégrable s'écrit comme:

$$Y = \int_{A_z} \phi_\alpha dW_\alpha + \int_{A_z} \int_{A_z} \psi(\alpha, \alpha') dW_\alpha dW_{\alpha'} = \int_{A_{(x,y)}} [\phi_\alpha + \int_0^\xi \int_\eta^Y (\psi(\alpha, \alpha') +$$

$$\psi(\alpha', \alpha)) dW_\alpha] dW_{\alpha'} = \int_{A_{(x,y)}} \Gamma^*((\xi, \eta), y) dW_\alpha .$$

En conséquence, si le processus $Y = \{Y_z, z \in T\}$ est tel que, pour chaque y fixé, $\{Y_{(x,y)}, \hat{A}_{(x,y)}, x \in [0, 1]\}$ est une martingale à un paramètre de carré intégrable, il existe un seul processus $\Gamma^*(\alpha, y)$ défini par $\alpha = (\xi, \eta) \in T$, $\eta \leq y \leq 1$, $\hat{A}_{(\xi, y)}$ -mesurable, tel que

$$Y_z = \int_{A_z} \Gamma^*(\alpha, y) dW_\alpha .$$

Ce résultat appliqué au processus $\{N_1(x, \eta), (x, \eta) \in T\}$ donné par $M_1(x, y) = \int_0^Y N_1(x, \eta) d\eta$, dont on peut prouver la propriété de 1-martingale à partir de celle de M_1 , donne alors

$$N_1(x, \eta) = \int_{A(x, \eta)} \Gamma_1^*((\xi, \eta'), \eta) dW_{(\xi, \eta')}$$

et on prend $\Gamma_1((\xi, \eta), \eta') = \Gamma_1^*((\xi, \eta'), \eta)$. $\square$

On obtient un résultat semblable pour le processus $M_2(z)$, en introduisant une nouvelle intégrale stochastique mixte qu'on désignera par:

$$\tilde{I}_4(\Gamma_2) = \int_{A_z} \int_0^\xi \Gamma_2(\alpha, \xi') dW_{(\xi', \eta)} d\xi ,$$

définie pour les processus $\Gamma_2(\alpha, \xi')$, où $\alpha = (\xi, \eta) \in T$ et $\xi' \in [0, \xi]$, vérifiant les propriétés

- (a) $\Gamma_2(\alpha, \xi', \omega)$ est $B' \otimes A$ -mesurable, où B' désigne les Boréliens de $T' = \{(\alpha, \xi') / \alpha \in T, \xi' \in [0, \xi]\}$
- (b) $\Gamma_2(\alpha, \xi')$ est A_α -mesurable, et
- (c) $\int_{A_z} \int_0^\xi E(\Gamma_2(\alpha, \xi')^2) d\xi' d\alpha < \infty$.

Le théorème suivant n'est que la conclusion des propositions précédentes.

Théorème 3.2. Il existent des processus ϕ , I_1 -intégrable, ψ , I_2 -intégrable, Γ_1 , I_3 -intégrable, Γ_2 , I_4 -intégrable et Γ , $B \otimes A$ -mesurable et A_z -adapté, tels que

$$X_z = \int_{A_z} \phi_\alpha dW_\alpha + \int_{A_z} \int_{A_z} \psi(\alpha, \alpha') dW_\alpha dW_{\alpha'} + \int_{A_z} \int_0^\eta \Gamma_1(\alpha, \eta') dW_{(\xi, \eta')} d\eta + \int_{A_z} \int_0^\xi \Gamma_2(\alpha, \xi') dW_{(\xi', \eta)} d\xi + \int_{A_z} \Gamma_\alpha d\alpha.$$

Finalement, cette expression intégrale du processus est assez générale, dans le sens où le processus

$$Y_z = f(X_z, z) - f(X_{(x,0)}, x, 0) - f(X_{(0,y)}, 0, y) + f(X_{(0,0)}, 0, 0)$$

admet une expression semblable, et on peut énoncer une formule de différentiation plus générale:

Théorème 3.3. Avec les hypothèses du théorème 3.1., on a

$$Y_z = \int_{A_z} \phi_\alpha^* dW_\alpha + \int_{A_z} \int_{A_z} \psi^*(\alpha, \alpha') dW_\alpha dW_{\alpha'} + \int_{A_z} \int_0^\eta \Gamma_1^*(\alpha, \eta') dW_{(\xi, \eta')} d\eta + \int_{A_z} \int_0^\xi \Gamma_2^*(\alpha, \xi') dW_{(\xi', \eta)} d\xi + \int_{A_z} \Gamma_\alpha^* d\alpha,$$

où les coefficients de cette formule sont donnés par:

$$\phi_\alpha^* = f'_u(X_\alpha, \alpha) \phi_\alpha,$$

$$\psi^*(\alpha, \alpha') = f'_u(X_{\alpha \vee \alpha'}, \alpha \vee \alpha') \psi(\alpha, \alpha') + f''_{uu}(X_{\alpha \vee \alpha'}, \alpha \vee \alpha') \delta_1(\alpha, \eta \vee \eta')$$

$$\delta_2(\alpha', \xi \vee \xi') = \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_{\alpha'} f''_{uu}(X_{\alpha \vee \alpha'}, \alpha \vee \alpha'), \quad \text{où}$$

$$\delta_1(\alpha, \eta_1) = \phi_\alpha + \int_0^\xi \int_\eta^{\eta_1} (\psi(\alpha, \alpha'') + \psi(\alpha'', \alpha)) dW_{\alpha''} + \int_\eta^{\eta_1} 1_1((\xi, \eta''), \eta) d\eta'',$$

$$\text{et } \delta_2(\alpha, \xi_1) = \phi_\alpha + \int_\xi^{\xi_1} \int_0^\eta (\psi(\alpha, \alpha'') + \psi(\alpha'', \alpha)) dW_{\alpha''} + \int_\xi^{\xi_1} \Gamma_2((\xi'', \eta), \xi) d\xi'',$$

$$\begin{aligned} \Gamma_i^*(\alpha, \eta') &= f'_u(X_\alpha, \alpha) \Gamma_1(\alpha, \eta') + f''_{uu}(X_\alpha, \alpha) \delta_1((\xi, \eta'), \eta) \gamma_1(\alpha) + \\ &\quad D_2(f'_u)(X_\alpha, \alpha) \delta_1((\xi, \eta'), \eta), \quad \text{où} \end{aligned}$$

$$\gamma_1(\alpha) = \int_{A_\alpha} \Gamma_1((\xi', \eta), \eta') dW_\alpha + \int_0^\xi \Gamma(\xi', \eta) d\xi',$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2^*(\alpha, \xi') &= f'_u(X_\alpha, \alpha) \Gamma_2(\alpha, \xi') + f''_{uu}(X_\alpha, \alpha) \delta_2((\xi', \eta), \xi) \gamma_2(\alpha) + \\ &\quad D_1(f'_u)(X_\alpha, \alpha) \delta_2((\xi', \eta), \xi), \quad \text{où} \end{aligned}$$

$$\gamma_2(\alpha) = \int_{A_\alpha} \Gamma_2((\xi, \eta'), \xi') dW_\alpha + \int_0^\xi \Gamma(\xi, \eta') d\eta',$$

$$\begin{aligned} \Gamma^*(\alpha) &= f'_u(X_\alpha, \alpha) \Gamma(\alpha) + f''_{uu}(X_\alpha, \alpha) \gamma_1(\alpha) \gamma_2(\alpha) + D_1(f'_u)(X_\alpha, \alpha) \gamma_1(\alpha) + \\ &\quad D_2(f'_u)(X_\alpha, \alpha) \gamma_2(\alpha) + (D_1 \circ D_2)(X_\alpha, \alpha), \end{aligned}$$

$$\text{étant } D_1 = \frac{1}{2} A_2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{1}{2} A_1(x, y) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{où}$$

$A_1(x, y)$ ($A_2(x, y)$) est, pour chaque $y \in [0, 1]$ ($x \in [0, 1]$), le processus croissant continu associé à la partie de martingale dans la décomposition de la semimartingale à un paramètre $\{X_{(x, y)}, x \in [0, 1]\}$ ($\{X_{(x, y)}, y \in [0, 1]\}$).

Démonstration: Il s'agit de déduire d'abord ce qu'on peut écrire formellement comme

$$\begin{aligned} Y_Z &= \int_{A_Z} [f'_u dX + f''_{uu} d_1 X d_2 X + D_1(f'_u) d_2 X d\xi + D_2(f'_u) d_1 X d\eta + \\ &\quad (D_1 \circ D_2)(f) d\xi d\eta], \end{aligned}$$

on substitue ensuite X par sa représentation intégrale. $\square$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1]. Cairoli, R. and Walsh, J.B.: "Stochastic integrals in the plane". Acta Mathematica, 134, 111-183 (1975).
- [2] Park, W.J.: "A multiparameter Gaussian process". Ann. Math. Statist. 41, 1582-1595 (1970).
- [3] Wong, E. and Zakai, M.: "Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 29, 109-122 (1974).
- [4] Itô, K.: "Multiple Wiener integral", J. Math. Soc. Japan, 3, 157-169 (1951)