

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. MOUCHTARI

La topologie du type Sazonov pour les Banach et les supports hilbertiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 77-87

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_77_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TOPOLOGIE DU TYPE SAZONOV POUR LES BANACH ET LES SUPPORTS

HILBERTIENS

D. MOUCHTARI, UNIVERSITE DE CLERMONT

1. Introduction

Notations : $\{E, |\cdot|\}$ est un espace vectoriel métrique complet

(e.v.m.c.), $V_\varepsilon(x)$ un ε -voisinage de x , $V_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} V_\varepsilon(0)$. Pour tous les espaces de variables aléatoires $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on utilise les notations

$$L^0, f = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} dP.$$

Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual E' . $\mathcal{L}$

l'algèbre des ensembles cylindriques sur E .

Chaque application linéaire $\phi : E' \rightarrow L^0$ définit une mesure cylindrique μ_ϕ sur $(E, \mathcal{L})$. La principale question pour μ_ϕ est la suivante : quand peut-elle être prolongée en une mesure de Radon P_ϕ sur E ? (On dira que μ_ϕ est de Radon). Dans le cas où E est un Hilbert séparable, Sazonov [1] a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que μ_ϕ soit de Radon : la continuité de ϕ par rapport à la topologie $\mathcal{T}$ définie par la famille $\{.,.\}_{(K,P)}$ de produits scalaires (K compact de E , P probabilité de Radon sur K) :

$$(x', y')_{(K,P)} = \int_K \langle x', . \rangle \langle y', . \rangle dP(.). \quad (1)$$

Définition 1 :

Soit E un e.v.t. séparé par son dual E' . Une topologie $\mathcal{T}$ sur E' est dite S -topologie si la $\mathcal{T}$ -continuité d'une application linéaire $\phi : E' \rightarrow L^0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que μ_ϕ soit de Radon.

Définition 2 :

Disons que E est de type (S) si sur E' il existe au moins une S -topologie.

Dans leurs thèses, Sazonov et Sudakov ont démontré que [2] la topologie définie par les produits scalaires (1) n'est pas une S -topologie pour

Proposition 2

Soit E un espace de type (S). Alors, $\mathcal{Y}$ est une S-topologie sur E' .

Démonstration : Il suffit de démontrer que $\mathcal{Y}$ est suffisante. Soit ϕ $\mathcal{Y}$ -continue. Soit $V(\phi_n ; \delta_n)$ une suite de voisinages de 0 dans $\mathcal{Y}$ telle que $V(\phi_n ; \delta_n) \subset V(\phi ; 1/n)$. Soit $\mathcal{Z}$ une S-topologie dans E' . Alors, par la définition des S-topologies, toutes les ϕ_n sont $\mathcal{Z}$ -continues ; donc ϕ est $\mathcal{Z}$ -continue et μ_ϕ est de Radon.

2. Les espaces de type (S)

Proposition 3

Soit E un e.v.m.c. admettant la propriété d'approximation, c'est à dire qu'il existe une suite $T_n : E \rightarrow E$ d'opérateurs linéaires continus de rang fini telle que, pour chaque $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = x$. Alors E est séparé par son dual.

En effet, chaque fonctionnelle $x^{(n)} \circ T_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, où $x^{(n)}$ est une forme linéaire sur $T_n E$, est une forme linéaire continue sur E . E est alors séparé par l'enveloppe algébrique de l'ensemble de ces fonctionnelles : en effet, pour tous x, y distincts dans E , on peut trouver n tel que $T_n x \neq T_n y$ et trouver une forme linéaire x' sur $T_n(E)$ qui sépare ces points.

Proposition 4

Soit E, F , deux e.v.m.c., $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs de rang fini qui converge vers l'opérateur continu T . Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour chaque n , $T_n V_\delta \subset V_\varepsilon$.

Démonstration : Posons $A = \bigcap_n T_n^{-1} V_{\varepsilon/2}$. A est fermé et absorbant, donc de catégorie 2 ; donc, pour un $x \in A$, $V_\delta(x) \subset A$. Alors, pour chaque $y \in V_\delta$,

pour chaque n $T_n y = T_n y' - T_n x$, où $y' \in V_\delta\{x\}$,

$$|T_n y|_0 \leq |T_n y'|_0 + |T_n x|_0 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Théorème 1

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^0 admettant la propriété d'approximation. Alors E est un espace de type (S).

Les opérateurs de rang fini définissant la propriété d'approximation seront toujours désignés par T_n ; et on notera T'_n l'opérateur transposé de T_n .

Nous utiliserons les lemmes préliminaires :

Lemme 1 : Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual E' .

Une probabilité cylindrique μ sur E se prolonge d'une façon unique en une probabilité de Radon P sur E si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un compact K_ε tel que pour chaque $C \in \mathcal{L}$, $C \cap K_\varepsilon = \emptyset$, $\mu(C) < \varepsilon$. (Voir par exemple [7]).

Lemme 2 : Soit E un e.v.m.c. admettant la propriété d'approximation. Alors $\phi : E' \rightarrow L^0$ définit une probabilité cylindrique prolongeable en une mesure de Radon si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on trouve $n(\varepsilon)$ tel que $\mu_\phi C < \varepsilon$ chaque fois que $C \in \mathcal{L}$, $n > n(\varepsilon)$ et $C \cap V_\varepsilon \{T_n E\} = \emptyset$.

(Conséquence immédiate du lemme 1.)

Lemme 3 : Supposons remplies les conditions du théorème 1. Soit $\phi : E' \rightarrow L^0$ linéaire faiblement séquentiellement continue. Alors μ_ϕ est de Radon si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $n(\varepsilon)$ et $p(\varepsilon)$ entiers tels que

$$\int_{E'} |\phi T'_p|_0 dP_{T_m - T_n} < \varepsilon \quad (2)$$

dès que $m > n > n(\varepsilon)$, $p > p(\varepsilon)$. (Ici l'application $T_m - T_n : E \rightarrow L^0$ définit la probabilité de Radon $P_{T_m - T_n}$ sur E').

Démonstration :

Remarquons que si P_ϕ est une mesure de Radon sur E , f une fonction bornée Lusin-mesurable sur E , T un opérateur continu de E , T' son transposé

$$\int_E f(x) dP_{\phi T'} = \int_E f(Tx) dP_\phi . \quad (3)$$

Nécessité :

$$\begin{aligned} \int_E |\phi_{T'_p}(x')|_0 P_{T_m - T_n} &= \int_E \int_E \frac{|\langle x, x' \rangle|}{1 + |\langle x, x' \rangle|} dP_{\phi T'_p} dP_{T_m - T_n} \\ &= \int_E |(T_m - T_n)(x)|_0 dP_{\phi T'_p} = \int_E |(T_m - T_n)T_p(x)|_0 dP_\phi . \end{aligned}$$

$(T_m - T_n)T_p(x)$ converge vers 0 quand $p, m, n \rightarrow \infty$. En effet, $(T_m - T_n)x$ converge vers 0, $(T_m - T_n)(T_p - \text{Id})(x)$ converge vers 0, parce que, pour δ fixé,

$|T_p x - x|_0 < \delta$ pour p assez grand et (proposition 4) pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|(T_m - T_n)(x)|_0 < \varepsilon$ chaque fois que $|x|_0 < \delta$.

Alors

$$\lim_{p, n, m \rightarrow \infty} \sup \{x : |(T_m - T_n)T_p x|_0 > \varepsilon/2\} = \emptyset ;$$

ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour $m, n > n(\varepsilon)$, $p > p(\varepsilon)$

$$P_\phi \{x : |(T_m - T_n)T_p x|_0 > \varepsilon/2\} < \varepsilon/2 ;$$

et donc

$$\int_E |(T_m - T_n)T_p x|_0 dP_\phi(x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Suffisance : Supposons que (2) soit vrai, mais que μ_ϕ ne soit pas de Radon.

Alors, selon le lemme 2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe

C_n dans $\mathcal{L}$ disjoint de $V_\varepsilon\{T_n E\}$ tel que $\mu_\phi C_n > \varepsilon$. Soit $\tilde{C}_n$ un espace vectoriel de dimension finie dans E' tel que $C_n + \tilde{C}_n^\circ = C_n$. Alors C_n est contenu

dans

$$B_n = \{x : (x + \tilde{C}_n^\circ) \cap V_\varepsilon\{T_n E\} = \emptyset\}$$

et $\mu_\phi B_n > \varepsilon$. L'intersection des ensembles $V_{\varepsilon/2}\{T_n E\}$ et $V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$ est

vide et ces deux ensembles sont ouverts. $V_{\varepsilon/2}\{B_n\} + C_n^\circ = V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$, donc

$V_{\varepsilon/2}\{B_n\}$ est cylindrique. Comme $T'_p x' \rightarrow x'$ faiblement pour tout x' ,

$\phi_{T_p}' x'$ converge vers μ_ϕ cylindriquement. Donc, $\liminf_{p \rightarrow \infty} P_{\phi_{T_p}'} V_{\epsilon/2} \{B_n\} > \epsilon$ et pour $p > p_0$, $P_{\phi_{T_p}'} V_{\epsilon/2} \{B_n\} > \epsilon$. En appliquant le théorème de Lebesgue nous avons pour $n, m > n(\epsilon^2/4)$, $p > p(\epsilon^2/4)$:

$$\int_E |(\tau_n - \text{Id})(x)|_0 dP_{\phi_{T_p}'} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E |(\tau_n - \tau_m)(x)|_0 dP_{\phi_{T_p}'} \leq \epsilon^2/4.$$

Mais $x \in V_{\epsilon/2} \{B_n\}$ entraîne $|(\tau_n - \text{Id})x|_0 > \epsilon/2$, et en prenant $p > p_0$, nous avons

$$\int_E |(\tau_n - \text{Id})(x)|_0 dP_{\phi_{T_p}'} > \int_{V_{\epsilon/2} \{B_n\}} |(\tau_n - \text{Id})(x)|_0 dP_{\phi_{T_p}'} > (\epsilon/2) \cdot \epsilon;$$

nous obtenons ainsi une contradiction.

Démonstration du théorème :

Il suffit de démontrer que la topologie $\mathcal{Y}$ est suffisante. Soit $\phi : E' \rightarrow L^0$ $\mathcal{Y}$ -continue.

(a) ϕ est séquentiellement faiblement continue. Soit $x'_n \rightarrow 0$ faiblement. Donc $x'_n(x) \rightarrow 0$ partout sur E . Alors, pour tout $\bar{\phi} \in \underline{S}$, $x'_n \rightarrow 0$ $P_{\bar{\phi}}$ -presque partout ; donc $x'_n \xrightarrow{P_{\bar{\phi}}} 0$; donc $\bar{\phi}(x'_n) \xrightarrow{P} 0$. Par définition de ϕ , pour chaque $\epsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ et $\bar{\phi} \in \underline{S}$ tels que $|\phi(x')|_0 < \epsilon$ chaque fois que $|\bar{\phi}(x')|_0 < \delta$. Mais pour $n > n(\delta)$, $|\bar{\phi}(x'_n)|_0 < \delta$; et donc $|\phi(x'_n)|_0 < \epsilon$.

(b) ϕ a la propriété (2). $\bar{\phi}$ a la propriété (2). Donc, pour $m, n > n(\epsilon\delta)$, $p > p(\epsilon\delta)$, nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon\delta &> \int_{E'} |\bar{\phi}_{T_p}'(x')|_0 dP_{T_m - T_n} \\ &> \int_{E'/V(\bar{\phi}_{T_p}', \delta)} |\bar{\phi}_{T_p}'(x')|_0 dP_{T_m - T_n} \\ &> \delta \cdot P_{T_m - T_n} \{E'/V(\bar{\phi}_{T_p}', \delta)\}. \end{aligned}$$

Donc, $P_{T_m - T_n} (E'/V(\bar{\phi}_{T_p}', \delta)) < \epsilon$. Comme $|\bar{\phi}_{T_p}'(x')|_0 < \delta$ entraîne $|\phi_{T_p}'(x')|_0 < \epsilon$, nous avons pour tous $m > n > n(\epsilon\delta)$, $p > p(\epsilon\delta)$

$$\int_{E'} |\phi_{T_p'}(x')| dP_{T_m - T_n}(x') < 2\varepsilon.$$

(c) Donc, par le lemme 3, μ_ϕ est de Radon.

La démonstration du théorème est analogue à celle du théorème 1 [8].

Ici les rôles de E et E' sont échangés.

Théorème 2 :

a) Le produit E d'une suite $\{E_n\}$ d'espaces de type (S) est un espace de type (S).

b) Tout sous-espace fermé E_0 d'un espace localement convexe E de type (S) est un espace de type (S).

c) La somme directe E d'une suite $\{E_n\}$ d'espaces de type (S) est un espace de type (S).

Démonstration :

(a) Soit $\phi : E' = \sum E'_n \rightarrow L^0$ $\mathcal{Y}$ -continue. Comme la projection sur $E^{(n)} = \prod_{i=1}^n E_i$ d'une mesure de Radon sur E est une mesure de Radon, la topologie sur $E^{(n)'} = \sum_{i=1}^n E'_i$ induite par $\mathcal{Y}$ est identique à la topologie $\mathcal{Y}$ pour le couple $(E^{(n)}, E^{(n)'})$. Alors, pour chaque entier n, la restriction de ϕ à $\sum_{i=1}^n E'_i$ définit une mesure de Radon sur $E^{(n)}$. Il est bien connu que μ_ϕ est alors de Radon sur E.

(b) Soit $\phi : E'_0 = E'/E^0 \rightarrow L^0$ $\mathcal{Y}$ -continue. Chaque mesure de Radon sur E_0 définit une mesure de Radon sur E ; donc l'application $\Psi : E' \rightarrow E'/E_0^0 \rightarrow L^0$, composée de ϕ et de l'application canonique, est $\mathcal{Y}$ -continue dans E'. Donc μ_Ψ est de Radon sur E et l'application du corollaire II.2.4. [9] nous donne que μ_ϕ est de Radon.

(c) En utilisant les mêmes raisonnements que dans la démonstration de (a) et de (a) du théorème 1, on démontre que pour chaque $\phi : E' \rightarrow L^0$ linéaire continue par rapport à $\mathcal{Y}$ sa restriction à $\prod_{i=1}^n E'_i$ définit une mesure

de Radon sur $\sum_{i=1}^n E_i$ et que ϕ est séquentiellement faiblement continue sur E' . Donc il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme 4 : Soit $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, $E' = \prod_{i=1}^{\infty} E'_i$. Soit $\phi : E' \rightarrow L^0$ linéaire séquentiellement continue telle que pour chaque n la restriction $\phi^{(n)}$ de ϕ à $E^{(n)} = \prod_{i=1}^n E'_i$ définit une mesure de Radon sur $E^{(n)} = \sum_{i=1}^n E_i$. Alors μ_ϕ est de Radon.

Démonstration :

(a) Posons ${}^{(n)}E = \sum_{i=n+1}^{\infty} E_i$, et pour $v \in E'$, posons

$$v^{(n)}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in E^{(n)} \\ 0 & \text{si } x \in {}^{(n)}E \end{cases}, \quad {}^{(n)}v = v - v^{(n)},$$

$$\phi^{(n)}(v) = \phi(v^{(n)}) \quad \text{et} \quad {}^{(n)}\phi(v) = \phi({}^{(n)}v).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $n(\varepsilon)$ assez grand tel que, pour tout $v \in E'$,

$$P \{ \omega : {}^{(n(\varepsilon))}\phi(v)(\omega) = 0 \} \geq 1 - \varepsilon/2.$$

Sinon il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque n on peut trouver v_n dans E' et $\delta_n > 0$ tels que

$$P \{ \omega : |\phi({}^{(n)}v_n)(\omega)| > \delta_n \} > \varepsilon/4.$$

Cela n'est pas possible, parce que $\delta_n^{-1} \cdot {}^{(n)}v_n$ converge faiblement vers 0, donc $\phi(\delta_n^{-1} \cdot {}^{(n)}v_n)$ converge en probabilité vers 0.

(b) Choisissons un compact $K(\varepsilon) \ni 0$ dans $E^{(n(\varepsilon))}$ tel que pour chaque ensemble cylindrique C de $E^{(n(\varepsilon))}$ disjoint de $K(\varepsilon)$ on ait $\mu_{\phi^{(n(\varepsilon))}}(C) < \varepsilon/2$.

Démontrons que $K(\varepsilon)$ est ε -compact pour μ_ϕ sur E . Supposons le contraire :

il existe un cylindre C_0 de E disjoint de $K(\varepsilon)$ tel que $\mu_\phi(C_0) > \varepsilon$,

$$C_0 = \{x : \langle x, v_1 \rangle \dots \langle x, v_k \rangle \in B\}$$

où B est un ensemble borélien dans R^k . D'après (a),

$$\mu_{\phi}\{x : \langle x, \cdot \rangle_{V_1}^{(n(\epsilon))} = 0 \text{ pour chaque } i\} \geq 1 - \epsilon/2.$$

Donc

$$\mu_{\phi(n(\epsilon))}(C_0 \cap E^{(n)}) = \mu_{\phi}(C_0 \cap \{x : \langle x, \cdot \rangle_{V_1}^{(n(\epsilon))} = 0 \text{ pour chaque } i\}) > \epsilon/2.$$

Corollaire : Tout sous-espace fermé de $L^1[0,1]$ est un espace de type (S).

3. Quelques caractérisations de Banach et de Fréchet de type (S)

Les résultats que je cite ici (sans démonstration) sont tout à fait semblables à ceux de [10].

Théorème 3

Soit E un espace p-normé de type (S) séparable complet. Alors E est plongable dans un L^q pour $q < p$, donc dans un L^0 .

Théorème 4

Un espace de Fréchet de type (S) est plongable dans un L^0 .

Théorème 5

Soit E un Fréchet de type (S). La topologie $\mathcal{Y}_p$, $0 < p < 1$ définie par les voisinages

$$\{x' : \int_K |\langle x, x' \rangle|^p dP \leq 1\} \quad (*)$$

(K compact de E, P probabilité de Radon sur K) est une S-topologie.

Théorème 6

Soit E un Banach de type (S) et de type q. Si $0 < p < q$, la topologie $\mathcal{Y}_p$ définie par les voisinages (*) est une S-topologie.

Théorème 7

Soit E un Banach de type (S) tel que la S-topologie dans E' soit définie par des voisinages convexes de type (p). Alors, E est de type p.

Théorème 8

Soit E un Fréchet dont la topologie est définie par une suite de produits scalaires. Alors, dans E' , il existe une S -topologie définie par des produits scalaires.

Théorème 9

Soit E un Fréchet tel que dans E' il existe une S -topologie définie par des produits scalaires. Alors, la topologie de E est définie par des produits scalaires.

Définition 5 :

Disons qu'une mesure μ sur E a son support hilbertien si μ est concentrée sur les compacts hilbertiens.

Corollaire : Soit E un Fréchet. Si chaque mesure de Radon sur E a un support hilbertien, la topologie de E est définie par des produits scalaires.

En effet, dans ce cas, la topologie sur E' définie par toutes les normes de type $(*)$ où $p = 2$ et K compact est une S -topologie.

Bibliographie

- [1] Sazonov V.V., Une remarque sur les fonctionnelles caractéristiques. Teoria verojatnostei i primeneniia 3, N2 (1958) (en russe).
- [2] Sazonov V.V., Dissertation candidate, Moscou, 1961 (en russe)
- [3] Sudakov V.N., Dissertation candidate, Leningrad, 1962 (en russe).
- [4] Sudakov V.N., Veršik A.M., Les questions topologiques de la théorie de la mesure dans les espaces linéaires, Uspekhi Mat. Nauk, 17, N4 (1962), 217-219 (en russe).
- [5] Sudakov V.N., Veršik A.M., Les mesures de probabilité dans les espaces de dimension infinie. Zapiski Nauch Seminarov LOMI, Vol. 12 (1969), 7-67 (en russe).
- [6] Dudley R.M., Random linear functionals. Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969) 1-24.
- [7] Dudley R.M., Feldman J., Le Cam L., On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces. Ann. of Math. 93 (1971), 390-408.
- [8] MOUCHTARI D. Kh., Some general questions of the theory of probability measures in linear spaces, Teoria verojatnostei i primeneniia XVIII, N1 (1973) 66-77 (en russe).
- [9] Badrikian A., Chevet S., Mesures cylindriques, Espaces de Wiener et fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture Notes in Mathematics n° 379 (1974).
- [10] MOUCHTARI D. Kh., Sur l'existence d'une topologie du type Sazonov sur un espace de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz, 1975-76, Ecole Polytechnique Exp. XVII.