

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

F. LAMBERT

**Conditions d'existence et d'unicité de la solution pour une
équation différentielle fonctionnelle stochastique**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 43-70

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_43_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_43_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONDITIONS D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION POUR UNE
EQUATION DIFFERENTIELLE FONCTIONNELLE STOCHASTIQUE

F. LAMBERT, UNIVERSITE DE MARSEILLE

Introduction

Il existe deux extensions classiques de la notion d'équation différentielle ordinaire ayant des applications très intéressantes à la description de certains systèmes physiques. Il s'agit de la notion d'équation différentielle stochastique (par exemple [1], [2]) et de la notion d'équation différentielle fonctionnelle (par exemple [3]).

Si $x(t)$ désigne l'état à l'instant t d'un certain système, dans de nombreux cas l'étude de l'évolution de ce système conduit à la résolution d'une équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) .$$

Dans le cas des équations différentielles stochastiques (e.d.s.), l'équation ci-dessus est perturbée par un terme aléatoire où s'introduit un bruit blanc $\dot{W}(t)$, ce qui conduit à une équation du type

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \dot{W}(t)$$

que l'on préférera écrire sous la forme

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t)$$

($W(t)$ est un mouvement brownien).

D'autre part, on peut envisager que la dépendance de $\dot{x}(t)$ ne soit pas limitée à l'état présent $x(t)$ du système mais puisse s'étendre à tous les états passés $(x(u))_{u \leq t}$, ceci en vue de traduire un certain effet de mémoire. Nous sommes alors conduits au concept d'équation différentielle fonctionnelle (e.d.f.)

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

où f est une fonctionnelle pouvant dépendre de $(x(u))_{u \leq t}$, appelée fonctionnelle non anticipative.

Comme exemples de telles équations, citons les équations à retard

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t), x(t-h))$$

et les équations intègro -différentielles

$$\dot{x}(t) = \int_0^t k(t, u, x(u)) du ,$$

les premières étant utilisées dans l'étude de certains systèmes automatiques et les secondes dans l'étude de la plastoélasticité.

Dans ce travail, nous essayons d'étendre certains théorèmes classiques d'existence et d'unicité au cas d'équations à la fois fonctionnelles et stochastiques (e.d.f.s.)

$$dX(t) = f(t, X) dt + g(t, X) dW(t)$$

(où f et g sont deux fonctionnelles non anticipatives).

Les théorèmes proposés généralisent certains résultats concernant les équations ci-dessus et figurant dans [4].

I - Principaux résultats dans le cas déterministe

Nous donnons dans ce paragraphe les principaux résultats d'existence et d'unicité de la solution pour une e.d.f., que l'on peut obtenir à partir d'une condition de Lipschitz. Il est intéressant de comparer ces résultats d'une part avec les théorèmes classiques sur les équations différentielles ordinaires et, d'autre part, avec les résultats du cas fonctionnel stochastique (paragraphe II), que nous établirons d'ailleurs par des méthodes tout à fait analogues.

Les définitions qui suivent resteront valables dans le paragraphe II.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et pour $x \in \mathcal{C}$, par $\|x\|_t$ le réel ≥ 0 : $\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|$ où $|\cdot|$ est l'une quelconque des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1

Nous dirons que la fonction f définie sur $[0, +\infty[\times \mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est une fonctionnelle non anticipative si, pour tout $t \geq 0$, tous $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$ tels que $x(s) = y(s)$, $s \in [0, t]$, on ait :

$$f(t, x) = f(t, y).$$

Définition 2

Nous dirons que la fonctionnelle non anticipative f vérifie une condition de Lipschitz (L) sur $[0, T] \times D$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, s'il existe une constante ≥ 0 $c(T, D)$ telle que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq c(T, D) \|x - y\|_t$$

pour tout $t \in [0, T]$, tout $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$, tels que $x(s) \in D$, $y(s) \in D$ pour $s \in [0, T]$.

Définition 3

Nous dirons que la fonctionnelle non anticipative f vérifie une condition de croissance majorée (CM) sur $[0, T] \times D$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, s'il existe une constante ≥ 0 $c(T, D)$ telle que

$$|f(t, x)| \leq c(T, D) (1 + \|x\|_t)$$

pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathcal{E}$ tel que $x(s) \in D$ pour $s \in [0, T]$.

Remarque 4 :

a) Si D est borné, il est équivalent de dire que f vérifie une condition (CM) sur $[0, T] \times D$, ou que f est bornée sur $[0, T] \times D$ au sens suivant :

Il existe une constante ≥ 0 $c(T, D)$ telle que $|f(t, x)| \leq c(T, D)$ pour tout $t \in [0, T]$, tout $x \in \mathcal{E}$ tel que $x(s) \in D$ pour $s \in [0, T]$.

b) La condition de croissance majorée est souvent une conséquence de la condition de Lipschitz. En effet, s'il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ telle que

$x_0(t) \in D$, $f(t, x_0) \leq A$ pour $t \in [0, T]$, alors

$$|f(t, x) - f(t, x_0)| \leq c \|x - x_0\|_t, \quad t \in [0, T]$$

entraîne

$$|f(t, x)| - |f(t, x_0)| \leq c \|x - x_0\|_t \leq c(\|x_0\|_t + \|x\|_t)$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq A + c\|x_0\|_t + \|x\|_t \\ &\leq c'(1 + \|x\|_t) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathcal{C}$ telle que $x(s) \in D$, $s \in [0, T]$.

Il en est ainsi notamment lorsque les fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ (que nous appellerons par analogie avec les processus, les trajectoires de f) sont continues.

Définition 5

Nous dirons que la fonctionnelle non anticipative f est globalement (resp. localement) lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times \mathcal{C}$ si elle vérifie une condition de Lipschitz sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ pour tout $T \geq 0$ (resp. sur $[0, T] \times K$ pour tout $T \geq 0$ et tout compact K de $\mathbb{R}^n$).

Définition 6

Nous dirons que la fonctionnelle non anticipative f est globalement (resp. localement) à croissance majorée sur $[0, +\infty[\times \mathcal{C}$ si elle vérifie une condition de croissance majorée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ pour tout $T \geq 0$ (resp. sur $[0, T] \times K$ pour tout $T \geq 0$ et tout compact K de $\mathbb{R}^n$).

Il est donc équivalent (Remarque 4.a) de dire que f est localement à croissance majorée ou localement bornée.

Dans les démonstrations, nous utiliserons constamment les résultats suivants connus sous le nom de lemme de Gronwall.

Lemme 7

Soit $\alpha(t)$ une fonction à valeurs ≥ 0 définie sur $[a, b]$ mesurable et bornée. S'il existe des constantes A, B positives telles que

$$\alpha(t) \leq A + B \int_a^t \alpha(u) du \quad t \in [a, b]$$

alors

$$\alpha(t) \leq A e^{B(t-a)} \quad t \in [a, b] .$$

Corollaire 8

Sous les hypothèses du lemme 7, si $A = 0$, alors $\alpha(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Dans la suite de ce paragraphe, f désignera une fonctionnelle non anticipative à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et à trajectoires localement intégrables.

Définissons le concept de solution d'une e.d.f.

Définition 9

Soit $t_0 \geq 0$ et φ une fonction continue sur $[0, t_0]$. Nous dirons que la fonction x est solution de l'équation

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x)$$

sur l'intervalle $I = [0, \theta)$ (avec $\theta > t_0$) pour la condition initiale (t_0, φ) si

- (i) x est définie continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
- (ii) $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [0, t_0]$
- (iii) $x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, x) du$ pour $t \in [t_0, \theta]$.

Nous avons alors les théorèmes d'existence et d'unicité suivants :

Théorème 10

Nous supposons la fonctionnelle f localement lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times \mathcal{E}$. Alors, si x et y sont solutions de (1), pour la même condi-

tion initiale, sur les intervalles respectifs I et J, les fonctions x et y coïncident sur $I \cap J$.

Démonstration

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $I = J = [0, \theta[$ ($\theta > t_0$). Soit alors une suite $(\theta_n)_{n \geq n_0}$ de nombres tels que $\theta_n \in [t_0, \theta[$, $\theta_n \uparrow \theta$ lorsque $n \uparrow +\infty$ et $|x(t)| \leq n$, $|y(t)| \leq n$ sur $[0, \theta_n[$.

Comme $\theta_n \uparrow \theta$, il nous suffit de montrer que x et y coïncident sur $[t_0, \theta_n]$ pour tout $n \geq n_0$.

Or, pour $t \in [t_0, \theta_n]$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(u, x) - f(u, y)| \, du \\ &\leq c(\theta_n, n) \int_{t_0}^t \|x-y\|_u \, du \end{aligned}$$

d'où, compte tenu du fait que x et y coïncident sur $[0, t_0]$,

$$\|x-y\|_t \leq c(\theta_n, n) \int_{t_0}^t \|x-y\|_u \, du .$$

Le corollaire 8 entraîne alors le résultat cherché.

Théorème 11

Si la fonctionnelle f satisfait à une condition de Lipschitz sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, alors, pour toute condition initiale (t_0, φ) (avec $0 \leq t_0 < T$), l'équation (1) admet une solution sur $[0, T]$.

Démonstration

Nous définissons, sur $\mathcal{C}[0, T]$, un opérateur S par :

$$\begin{cases} Sx(t) = \varphi(t) & 0 \leq t \leq t_0 \\ Sx(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, x) \, du & t_0 \leq t \leq T . \end{cases}$$

En utilisant la condition de Lipschitz, on montre qu'il existe $L \geq 0$ telle que

$$\|Sx - Sy\|_t \leq L \int_{t_0}^t \|x-y\|_u \, du$$

pour x et $y \in \mathcal{C}[0, T]$, $t \in [t_0, T]$.

De cette relation, nous déduisons premièrement que

$$\|Sx - Sy\|_T \leq H \|x - y\|_T$$

(donc S est uniformément continu pour la structure de la convergence uniforme sur $[0, T]$). D'autre part, pour y quelconque dans $\mathcal{C}[0, T]$, considérons la suite $(S_y^n)_{n \geq 0}$ des itérés de y . En utilisant la relation ci-dessus, il vient :

$$\|S_y^{n+1} - S_y^n\|_t \leq L^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \|S_y - y\|_u du$$

d'où

$$\|S_y^{n+1} - S_y^n\|_T \leq \frac{[L(T-t_0)]^n}{n!} \cdot \|S_y - y\|_T.$$

Ceci entraîne la convergence uniforme de la suite S_y^n vers une fonction x de $\mathcal{C}[0, T]$.

A cause de la continuité de S , x est alors un point fixe de S , d'où le théorème.

Corollaire 12

Si la fonctionnelle f est globalement lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, alors pour toute condition initiale (t_0, φ) , l'équation (1) admet une solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Théorème 13

Si la fonctionnelle f est localement lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times \mathcal{C}$, alors, pour toute condition initiale (t_0, φ) , il existe $\theta > t_0$ et x fonction continue sur $[0, \theta[$ tels que

- (i) x est solution de (1) sur $[0, \theta[$ pour la condition initiale (t_0, φ)
- (ii) si $\theta < +\infty$, x n'est pas bornée sur $[0, \theta[$.

L'énoncé de ce théorème appelle quelques remarques : le fait que x ne soit pas bornée, lorsque θ est fini, ne signifie pas que $|x(t)| \rightarrow +\infty$ pour $t \rightarrow \theta$. D'autre par, il résulte du théorème 10 et de (ii) qu'il ne peut exister de solution de (1) sur un intervalle J contenant strictement $[0, \theta[$ (pour la même condition initiale). On peut donc dire que x est la solution maximale de (1) et que θ est sa durée de vie ou l'instant d'explosion de cette solution.

Démonstration

On se ramène au cas globalement lipschitzien en posant, pour n entier ≥ 1 et $x \in \mathcal{C}$

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } |x(t)| \leq n \\ \frac{n}{|x(t)|} x(t) & \text{si } |x(t)| > n \end{cases}$$

puis, x_n étant dans $\mathcal{C}$,

$$f_n(t, x) = f(t, x_n) .$$

La fonctionnelle ainsi définie est non anticipative et à trajectoire localement intégrables. Elle est de plus globalement lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. En effet, pour $T \geq 0$, $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{C}$, nous avons

$$|f_n(t, x) - f_n(t, y)| = |f(t, x_n) - f(t, y_n)| \leq c(T, n) \|x_n - y_n\|_t$$

puisque $|x_n(t)| \leq n$, $|y_n(t)| \leq n$ $t \geq 0$.

Un raisonnement de géométrie élémentaire montre que

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq |x(t) - y(t)| \text{ pour tout } t, \text{ d'où}$$

$$|f_n(t, x) - f_n(t, y)| \leq c(T, n) \|x - y\|_t .$$

Pour $n > \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\varphi(t)|$, considérons alors l'équation

$$(E_n) \quad \dot{y}(t) = f_n(t, y)$$

qui admet pour la condition initiale (t_0, φ) une solution x^n sur $[0, +\infty[$.

Si $\theta_n = \inf \{t / |x^n(t)| > n\}$, on voit immédiatement que x^n est solution de (1) sur $[0, \theta_n]$, pour la condition initiale (t_0, φ) . Il résulte d'autre part du théorème 10 que la suite θ_n est croissante (strictement tant que $\theta_n < +\infty$) et que, pour $m > n$, x^n et x^m coïncident sur $[0, \theta_n]$.

Ceci permet de définir x solution de (1) sur $[0, \theta[$ avec $\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$ d'où (i). De plus, si x est bornée sur $[0, \theta[$ et si l'on suppose θ fini, alors $\theta_n > \theta$ pour n suffisamment grand, d'où la contradiction.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution à durée de vie infinie dans le cas localement lipschitzien.

Théorème 14

Si la fonctionnelle f est localement lipschitzienne et globalement à croissance majorée sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, alors, pour toute condition initiale (t_0, φ) , l'équation (1) admet une solution sur $[0, +\infty[$.

Démonstration

Soit x la solution maximale de (1) pour la condition initiale (t_0, φ) , θ sa durée de vie. Supposons θ fini. Pour $t \in [t_0, \theta[$, nous avons (condition de croissance majorée) :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(u, x)| \, du \\ &\leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t c(\theta) (1 + ||x||_u) \, du \\ &\leq A(\theta) + B(\theta) \int_{t_0}^t ||x||_u \, du \end{aligned}$$

En choisissant $A(\theta) \geq \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\varphi(t)|$, il vient

$$||x||_t \leq A(\theta) + B(\theta) \int_{t_0}^t ||x||_u \, du$$

pour $t \in [0, T]$ (avec T quelconque dans $[t_0, \theta[$) d'où (lemme 7) :

$$||x||_t \leq A(\theta) e^{B(\theta)(t-t_0)}$$

sur $[0, T]$ donc sur $[0, \theta[$. Ceci est en contradiction avec la conclusion du théorème 13 et, nécessairement, $\theta = +\infty$.

II. Théorèmes d'existence et d'unicité pour les e.d.f.s.

II.1. L'intégrale stochastique et les e.d.s.

Nous commençons par quelques rappels concernant l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques. Pour définir correctement la notion de solution d'une telle équation, il est nécessaire de la considérer sous sa forme intégrale

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(u, X(u)) du + \int_{t_0}^t g(u, X(u)) dW(u)$$

(Pour l'instant, f et g sont des fonctions définies sur $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et dans l'espace des matrices réelles $n \times m$, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^{nm}$).

Le mouvement brownien ayant des trajectoires p.s. à variation non bornée, il est nécessaire de donner une définition particulière pour la 2ème intégrale.

Etant donnés une base stochastique $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, P)$, que nous supposons, par commodité pour la suite, complète et continue à droite (c'est à dire telle que $\mathcal{A}$ soit p-complète, $\mathcal{A}_t$, $t \geq 0$, contienne tous les négligeables de $\mathcal{A}$ et que la famille $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ soit continue à droite) et un mouvement brownien W sur cette base (*), à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on définit, pour les processus F , progressivement mesurables (ou seulement adaptés) à trajectoire p.s. localement de carré intégrable, à valeurs

(*) En particulier, on suppose $W(t) - W(s)$ indépendant de $\mathcal{A}_s$ pour $t \geq s \geq 0$.

dans $\mathbb{R}^{nm}$ une intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} F dW \quad \text{pour } \alpha \geq \beta \geq 0$$

appelée intégrale stochastique et possédant les principales propriétés suivantes (par exemple [1], [2], [5]) :

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} F dW$ est une v.a. (en fait une classe de v.a.) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et :

$$\text{p.s. } \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda F + \mu G) dW = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} F dW + \mu \int_{\alpha}^{\beta} G dW \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

(ii) Si $E \int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dt < +\infty$, alors $E \int_{\alpha}^{\beta} F dW = 0$.

(iii) Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$E \left| \int_{\alpha}^{\beta} F dW \right|^2 \leq c E \int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dW.$$

La constante peut être prise égale à 1 si l'on choisit dans $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne et si l'on considère F à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ muni de sa norme habituelle. De plus si $n = m = 1$ et si le 2ème membre est fini, alors il y a égalité.

On peut, d'autre part, définir le processus $I(t) = \int_{\alpha}^t F dW$ $t \geq \alpha$ de façon à ce que $I(t)$ soit progressivement mesurable à trajectoires continues. On a alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $N > 0$:

$$(iv) P \left(\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| \int_{\alpha}^t F dW \right| > \varepsilon \right) \leq c' \left[\frac{N}{\varepsilon} + P \left(\int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dt > N \right) \right] (*)$$

où c' est une constante > 0 (indépendante de ε , N , F).

De plus, si $E \int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dt < +\infty$, le processus $I(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ est une martingale.

Le résultat suivant nous sera très utile pour démontrer les théorèmes concernant les e.d.f.s.

(*) On trouve par exemple cette formule dans [1] (I.4 Théorème 2) pour

$n = m = 1$. Alors on peut prendre $c' = 1$.

Lemme 1

Si X est une sous martingale positive à trajectoires continues (ou seulement continues à droite) sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors

$$E \left[\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} X^2(t) \right] \leq 4 E X^2(\beta)$$

Ce lemme est un cas particulier d'un théorème dû à Doob ([6], V th.22 et VI Rem. 2). Nous utiliserons plus précisément le corollaire suivant :

Corollaire 2

Sous les hypothèses permettant de définir l'intégrale stochastique, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$E \left[\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| \int_{\alpha}^t F dW \right|^2 \right] \leq c E \int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dt .$$

Démonstration

Si $E \int_{\alpha}^{\beta} |F|^2 dt < +\infty$, le processus $I(t) = \int_{\alpha}^t F dW$ est une martingale, donc $|I(t)|$ une sous-martingale positive (à trajectoires continues) et le corollaire résulte du lemme 1 et de la propriété (iii) de l'intégrale stochastique.

Moyennant cette définition de l'intégrale stochastique, on démontre que des conditions d'existence et d'unicité de la solution d'une e.d.s. sont une condition de Lipschitz

$$|f(t, \xi) - f(t, \xi')| + |g(t, \xi) - g(t, \xi')| \leq c |\xi - \xi'|$$

et une condition de croissance majorée

$$|f(t, \xi)| + |g(t, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)$$

(par exemple [1] pour $n = m = 1$).

Nous obtiendrons des résultats analogues dans le cas fonctionnel.

II.2. La notion d'équation différentielle stochastique fonctionnelle

Dans la suite, f et g seront deux fonctionnelles non anticipatives, définies sur $[0, +\infty] \times \mathbb{R}^n$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n \times m}$ telles que :

(i) f et g sont progressivement mesurables sur $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, (\mathcal{B}_t)_{t \geq 0})$ où $\mathcal{B}$ est la tribu de parties de $\mathcal{E}$ engendrée par des applications coordonnées $x \rightarrow x(t)$, $t \geq 0$ et, pour $t \geq 0$, $\mathcal{B}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ engendrée par $x \rightarrow x(s)$, $0 \leq s \leq t$.

(ii) les applications $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow g(t, x)$ sont, pour tout $x \in \mathcal{E}$, localement de carré intégrable.

Notons que (i) implique le caractère non anticipatif de f et g . De plus, (ii) sera vérifiée dès que f et g seront localement à croissance majorée.

En effet, dans ce cas, si $T \geq 0$, $x \in \mathcal{E}$, $M = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$, on a :

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq c(T, M) (1 + M)$$

pour $t \in [0, T]$.

D'autre part, nous noterons $\mathcal{E}(I)$ l'espace des processus définis sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, progressivement mesurables, à trajectoires continues, où I peut être

a) soit un intervalle ordinaire d'origine t_0 ;

b) soit un intervalle stochastique fermé $[[t_0, \tau]]$ (*) où τ est un temps d'arrêt à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$

c) soit un intervalle stochastique semi-ouvert $[[t_0, \tau[$ où τ est un temps d'arrêt à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$. Dans ce dernier cas, nous supposons toujours qu'il existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt tels que $t_0 \leq \tau_n < \tau$ (**), convergeant vers τ pour $n \uparrow +\infty$. De cette façon, pour

(*) $[[t_0, \tau]] = \{(t, \omega) / t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega, t_0 \leq t \leq \tau(\omega)\}$

(**) $\tau_n < \tau$ signifie $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$ pour tout ω tel que $\tau(\omega) < +\infty$.

tout $X \in \mathcal{E}(I)$, X sera à trajectoires continues sur $[[t_0, \tau_n]]$, avec t_0 nombre réel ≥ 0 , non aléatoire.

Pour $T \geq 0$ non aléatoire, l'espace $\mathcal{E}[0, T]$ sera muni d'une structure d'espace uniforme complet, par l'intermédiaire de l'écart

$$d(X, Y) = N(X - Y)$$

associé à la (pseudo) semi-norme

$$N(X) = [E (\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2)]^{1/2}$$

Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons :

Lemme 3

Pour tout $X \in \mathcal{E}(I)$, où I est un intervalle (stochastique ou non) d'origine 0, les processus $f(t, X)$ et $g(t, X)$ sont définis sur I , progressivement mesurables, à trajectoires localement de carré intégrable.

Démonstration :

Pour tout $(t, \omega) \in I$, on peut définir $f(t, X(\omega))$ [resp. $g(t, X(\omega))$] en considérant une fonction y quelconque de $\mathcal{C}$ qui coïncide avec $X(\omega)$ sur $[0, t]$: alors

$$f(t, X(\omega)) = f(t, y).$$

Si I est fermé à droite, les trajectoires de $f(t, X)$ et $g(t, X)$ sont de carré intégrable : cela résulte immédiatement de (ii). Si I est ouvert à droite ($I = [[0, \tau[$), ces trajectoires sont localement de carré intégrable : cela résulte de (ii) et du fait qu'il existe une suite (τ_n) croissante de temps d'arrêt $< \tau$ avec $\tau_n \rightarrow \tau$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Pour établir la progressive mesurabilité de $f(t, X)$ [resp. de $g(t, X)$] étudions divers cas :

a) Si $I = [0, +\infty[$, pour $t \geq 0$, l'application $\omega \rightarrow X(\omega)$ est $\mathcal{A}_t - \mathcal{B}_t$ mesurable ; elle est de plus $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ mesurable. La conclusion résulte alors de (i).

b) Si $I = [0, T]$ ou $[[0, \tau]]$, on peut prolonger X à $[0, +\infty[\times \Omega$ de façon à ce que $X \in \mathcal{E}[0, +\infty[$ et la conclusion résulte de l'étude du cas précédent.

c) Si $I = [[0, \tau[$, pour $\tau_n \uparrow \tau$, en prolongeant, comme dans le cas précédent, la restriction de X à $[[0, \tau_n]]$, on montre que les restrictions de $f(t, X)$ et $g(t, X)$ à $[[0, \tau_n]]$ sont progressivement mesurables d'où, encore, le résultat cherché.

Soit alors $t_0 \geq 0$ et I un intervalle contenant $[0, t_0]$ (resp. un intervalle stochastique contenant $[[0, t_0]]$). On peut définir sur $J = I \cap [t_0, +\infty[$ (resp. $J = I \cap [[t_0, +\infty[[$) des processus

$$\int_{t_0}^t f(u, X) du \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t g(u, X) dW(u)$$

qui appartiennent tous deux à $\mathcal{E}(J)$.

En ce qui concerne le second processus, plusieurs versions (continues) peuvent exister, mais deux versions différentes ont presque sûrement les mêmes trajectoires.

Les remarques précédentes nous permettent de définir correctement ce que l'on entend par solution d'une e.d.f.s.

Définition 4

Soit $t_0 \geq 0$ et ϕ un processus de $\mathcal{E}[0, t_0]$. On dit que le processus X est solution de l'équation

$$(1) \quad dX(t) = f(t, X) dt + g(t, X) dW(t)$$

sur l'intervalle stochastique $I = [[0, \tau))$ contenant strictement $[[0, t_0]]$ (*) pour la condition initiale (t_0, ϕ) si :

(i) X est défini sur I et la restriction de X à I est dans $\mathcal{E}(I)$.

(ii) $X(t, \omega) = \phi(t, \omega)$ presque sûrement pour tout $t \in [0, t_0]$.

(*) Nous supposerons plus exactement que $\{\omega / \tau(\omega) > t_0\}$ est non négligeable.

$$(iii) \quad X(t, \omega) = \Phi(t_0, \omega) + \int_{t_0}^t f(u, X(u)) du + \int_{t_0}^t g(u, X(u)) dW(u)$$

presque sûrement pour tout $t \in [0, \tau]$.

Remarque 5

Si X est solution de (1) sur I , tout processus Y dont les trajectoires coïncident presque sûrement avec celles de X sur I est aussi solution de (1) sur I pour la même condition initiale.

II.3. Unicité de la solution pour les équations localement lipschitziennes

Théorème 6

On suppose les fonctionnelles f et g localement lipschitziennes sur $[0, +\infty[\times \mathcal{E}$. Si X est solution de (1) sur $I = [[0, \sigma]]$ (resp. $I = [[0, \sigma[[$) pour la condition initiale (t_0, Φ) et si Y est solution de (1) sur $J = [[0, \theta]]$ (resp. $J = [[0, \theta[[$) pour la même condition initiale, alors X et Y ont des trajectoires qui presque sûrement coïncident sur $I \cap J$.

Démonstration

Il suffit de démontrer le théorème pour $I = J = [[0, \sigma]]$. En effet, pour deux intervalles fermés quelconques, X et Y sont solutions de (1) sur $I \cap J$. De plus, si les intervalles sont semi-ouverts, pour $\sigma_n \uparrow \sigma$, $\theta_n \uparrow \theta$, on a $\inf(\sigma_n, \theta_n) \uparrow \inf(\sigma, \theta)$. Dans ce cas, X et Y ont presque sûrement les mêmes trajectoires sur $[[0, \inf(\sigma_n, \theta_n)]]$ pour tout n , donc sur $[[0, \inf(\sigma, \theta)[[= I \cap J$.

Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$\tau_n = \inf \{ \sigma, \tau_n(X), \tau_n(Y) \}$$

où $\tau_n(X)$ et $\tau_n(Y)$ sont respectivement les temps d'entrée de X et de Y dans l'ouvert $\{ \xi / |\xi| > n \}$ (avec les conventions habituelles).

Alors τ_n est un temps d'arrêt $\leq \sigma$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et pour $n \uparrow +\infty$, τ_n tend en croissant vers σ .

Soit X^{τ_n} le processus défini sur $[0, +\infty[$ par

$$X^{\tau_n}(t) = X(t \wedge \tau_n) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n > 0\}}.$$

Autrement dit

$$\begin{cases} X^{\tau_n}(t) \equiv 0 & \text{si } \tau_n = 0 \\ X^{\tau_n}(t) = \begin{cases} X(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_n \\ X(\tau_n) & \text{pour } t \geq \tau_n \end{cases} & \text{si } \tau_n > 0. \end{cases}$$

On définit de même le processus Y^{τ_n} .

Le théorème sera démontré si l'on établit que pour tout $n \geq 1$, les processus X^{τ_n} et Y^{τ_n} , qui sont dans $\mathcal{E}[0, +\infty[$, ont presque sûrement les mêmes trajectoires sur $[0, +\infty[$.

Nous avons, presque sûrement, pour $0 \leq t \leq t_0$ $X^{\tau_n}(t) = Y^{\tau_n}(t) = \Phi^{\tau_n}(t)$, pour $t \geq 0$

$$X^{\tau_n}(t) = \Phi^{\tau_n}(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, X^{\tau_n}) Z_n(u) du + \int_{t_0}^t g(u, X^{\tau_n}) Z_n(u) dW(u)$$

$$Y^{\tau_n}(t) = \Phi^{\tau_n}(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, Y^{\tau_n}) Z_n(u) du + \int_{t_0}^t g(u, Y^{\tau_n}) Z_n(u) dW(u)$$

où, pour $u \geq 0$, $Z_n(u) = \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq u\}}$.

Donc, presque sûrement, pour $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |X^{\tau_n}(t) - Y^{\tau_n}(t)|^2 &\leq 2(t-t_0) \int_{t_0}^t |f(u, X^{\tau_n}) - f(u, Y^{\tau_n})|^2 Z_n(u) du \\ &\quad + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(u, X^{\tau_n}) - g(u, Y^{\tau_n})] Z_n(u) dW(u) \right|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |X^{\tau_n}(s) - Y^{\tau_n}(s)|^2 &\leq 2(t-t_0) \int_{t_0}^t |f(u, X^{\tau_n}) - f(u, Y^{\tau_n})|^2 Z_n(u) du \\ &\quad + 2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \int_{t_0}^s [g(u, X^{\tau_n}) - g(u, Y^{\tau_n})] Z_n(u) dW(u) \right|^2 \end{aligned}$$

Utilisant alors le corollaire 2 et le fait que X^{τ_n} et Y^{τ_n} coïncident presque sûrement sur $[0, t_0]$, il vient :

$$\begin{aligned} E[|X^{\tau_n} - Y^{\tau_n}|_t^2] &\leq 2(t-t_0) \int_{t_0}^t E[|f(u, X^{\tau_n}) - f(u, Y^{\tau_n})|^2 Z_n(u)] du \\ &\quad + 2c \int_{t_0}^t E[|g(u, X^{\tau_n}) - g(u, Y^{\tau_n})|^2 Z_n(u)] du. \end{aligned}$$

Les processus X^{τ_n} et Y^{τ_n} sont à valeurs dans $\{\xi / |\xi| \leq n\}$, la condition de Lipschitz jointe au fait que le processus Z_n est à valeurs dans $[0, 1]$, entraîne l'existence d'une constante $L(T, n) \geq 0$ telle que

$$E ||X^{\tau_n} - Y^{\tau_n}||_t^2 \leq L(T, n) \int_{t_0}^t E ||X^{\tau_n} - Y^{\tau_n}||_u^2 du$$

pour tout $T \geq t_0$ et $t \in [t_0, T]$.

Pour utiliser le corollaire I.8, nous devons montrer que la fonction $t \rightarrow E ||X^{\tau_n} - Y^{\tau_n}||_t^2$ est bornée sur tout intervalle $[t_0, T]$. Cela résulte immédiatement du fait que X^{τ_n} et Y^{τ_n} sont eux-même bornés.

Nous avons alors (corollaire I.8)

$$E ||X^{\tau_n} - Y^{\tau_n}||_t^2 = 0 \text{ pour tout } t \geq t_0$$

d'où

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{\tau_n}(s) - Y^{\tau_n}(s)|^2 = 0 \text{ p.s.}$$

ce qui entraîne le résultat cherché.

II.4. Existence de la solution pour des équations globalement lipschitziennes

Théorème 7

Si les fonctionnelles f et g satisfont simultanément sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ à une condition de Lipschitz et à une condition de croissance majorée, alors, pour toute condition initiale (t_0, Φ) (avec $0 \leq t_0 < T$) telle que $E (\sup_{0 \leq t \leq t_0} |\Phi(t)|^2) < +\infty$, l'équation (1) admet une solution X sur l'intervalle ordinaire $[0, T]$. Cette solution est telle que

$$E [\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2] < +\infty.$$

Démonstration

Définissons sur l'espace $\mathcal{E}[0, T]$ muni de la structure uniforme introduite en 2, un opérateur S par :

$$\begin{cases} Sy(t) = \Phi(t) & 0 \leq t \leq t_0 \\ SY(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, Y) du + \int_{t_0}^t g(u, Y) dW(u) & t_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Nous supposons pour cela que, pour chaque $Y \in \mathcal{E}[0, T]$, il est fait choix d'une version continue de l'intégrale stochastique $\int_{t_0}^t g(u, Y) dW(u)$.

Pour démontrer le théorème, nous devons établir que cet opérateur possède un point fixe X . Nous procédons en 4 étapes :

Etape 1 : Pour tout $Y \in \mathcal{E}[0, T]$ tel que $N(Y) < +\infty$, on a $N(SY) < +\infty$.

Par un calcul classique, presque sûrement, pour tout $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |SY(t)|^2 \leq & 3 [|\Phi(t_0)|^2 + (T-t_0) \int_{t_0}^T |f(u, Y)|^2 du \\ & + \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t g(u, Y) dW(u) \right|^2]. \end{aligned}$$

Le corollaire 2 entraîne

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |SY(t)|^2 \right] \leq & 3 [E|\Phi(t_0)|^2 + (T-t_0) \int_{t_0}^T E|f(u, Y)|^2 du \\ & + c \int_{t_0}^T E|g(u, Y)|^2 du]. \end{aligned}$$

Utilisant alors la condition de croissance majorée, nous obtenons

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |SY(t)|^2 \right] \leq & 3E |\Phi(t_0)|^2 + L_1 + L_2 \int_{t_0}^T E|Y|_u^2 du \\ \leq & 3E |\Phi(t_0)|^2 + L_1 + L_2(T-t_0) N^2(Y) \end{aligned}$$

où L_1 et L_2 sont des constantes ≥ 0 .

La conclusion résulte alors de ce que

$$N(Y) < +\infty \quad \text{et} \quad E \left(\sup_{0 \leq t \leq t_0} |\Phi(t)|^2 \right) < +\infty.$$

Etape 2 : Il existe une constante $L \geq 0$ telle que, pour $t \in [t_0, T]$,

$X \in \mathcal{E}[0, T]$, $Y \in \mathcal{E}[0, T]$

$$E ||SX-SY||_t^2 \leq L \int_{t_0}^t E||X-Y||_u^2 du$$

Par un calcul analogue à celui de l'étape 1, il vient :

Presque sûrement pour $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |SX(s)-SY(s)|^2 \leq & 2(T-t_0) \int_{t_0}^t |f(u, X) - f(u, Y)|^2 du \\ & + 2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \int_{t_0}^s (g(u, X)-g(u, Y)) dW(u) \right|^2 \end{aligned}$$

puis en utilisant le corollaire 2 et le fait que SX et SY coïncident sur $[0, t_0]$

$$\begin{aligned} E ||SX - SY||_t^2 &\leq 2 (T-t_0) \int_{t_0}^t E |f(u, X) - f(u, Y)|^2 du \\ &+ 2c \int_{t_0}^t E |g(u, X) - g(u, Y)|^2 du . \end{aligned}$$

La conclusion résulte alors de la condition de Lipschitz.

Une première conséquence de l'inégalité que l'on vient d'établir est que

$$N^2(SX - SY) \leq L (T-t_0) N^2(X-Y)$$

ce qui prouve que S est uniformément continu.

Etape 3 : Pour tout $Y \in \mathcal{E}$ tel que $N(Y) < +\infty$, la suite des itérés de Y converge pour la topologie associée à N.

Appliquons l'inégalité obtenue à l'étape 2 à $S^{n+1}Y - S^nY$.

$$\begin{aligned} E ||S^{n+1}Y - S^nY||_t^2 &\leq L \int_{t_0}^t E ||S^nY - S^{n-1}Y||_u^2 du \\ &\leq L^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} E ||S^{n-1}Y - S^{n-2}Y||_u^2 du \\ &\leq L^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} E ||SY - Y||_u^2 du \\ &\leq L^n N^2(SY - Y) \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} du \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$N^2(S^{n+1}Y - S^nY) \leq \frac{L^n (T-t_0)^n}{n!} N^2(SY - Y).$$

Nous avons $N(SY - Y) \leq N(SY) + N(Y) < +\infty$ (hypothèse et étape 1). La suite $(S^nY)_{n \geq 0}$ est alors une suite de Cauchy, convergente puisque $\mathcal{E}$ est complet.

Etape 4 : Existence d'une solution de (1).

Choisissons $Y(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Soit X une limite de la suite $(S^nY)_{n \geq 0}$. Nous avons, puisque S est continu :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(S^{n+1}Y - SX) = 0$$

d'où, $S^{n+1}Y$ convergeant évidemment vers X, $N(SX - X) = 0$.

Ceci établit immédiatement que X est solution de (1) pour la condition initiale (t_0, Φ) .

Le fait que $N(X)$ soit fini résulte de la convergence de $S^n Y$ vers X et de ce que $N(S^n Y) < +\infty$ pour tout n .

Théorème 8

Si les fonctionnelles f et g satisfont simultanément sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ à une condition de Lipschitz et à une condition de croissance majorée, alors, pour toute condition initiale (t_0, Φ) l'équation (1) admet une solution sur l'intervalle ordinaire $[0, T]$.

Démonstration

Soit τ_n le temps d'arrêt égal au temps d'entrée de Φ dans $\{\xi/|\xi| > n\}$ avec la convention $\tau_n = t_0$ si $\sup_{0 \leq t \leq t_0} |\Phi(t)| \leq n$. Nous posons :

$$\Phi^n(t) = \Phi(t \wedge \tau_n) \mathbf{1}_{\{\tau_n > 0\}} \quad 0 \leq t \leq t_0$$

Alors Φ^n est un processus de $\mathcal{B}[0, t_0]$ borné par n , qui converge simplement vers Φ pour $n \rightarrow +\infty$. Plus précisément, si l'on pose

$A_n = \{\omega / \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\Phi(t, \omega)| \leq n\}$, pour tout $k \geq n$, Φ^k coïncide avec Φ sur $[0, t_0] \times A_n$ et l'on a $A_n \in \mathcal{A}_{t_0}$, $A_n \uparrow \Omega$ pour $n \uparrow +\infty$.

D'après le théorème 7, pour tout $n \geq 1$, l'équation (1) admet une solution X^n sur $[0, T]$ pour la condition initiale Φ^n . Nous allons montrer que, presque sûrement, pour $k \geq n$, X^k a les mêmes trajectoires que X^n , si $\omega \in A_n$.

Pour $k \geq n$, $[\Phi^k(t_0) - \Phi^n(t_0)] \mathbf{1}_{A_n} = 0$, d'où, p.s., pour $t \in [t_0, T]$

$$[X^k(t) - X^n(t)] \mathbf{1}_{A_n} = \int_{t_0}^t [f(u, X^k) - f(u, X^n)] \mathbf{1}_{A_n} du + \int_{t_0}^t [g(u, X^k) - g(u, X^n)] \mathbf{1}_{A_n} dW(u).$$

Il résulte alors du corollaire 2 et de la condition de Lipschitz que,

pour $t \in [t_0, T]$

$$E ||(X^k - X^n) \mathbf{1}_{A_n}||_t^2 \leq L \int_{t_0}^t E ||(X^k - X^n) \mathbf{1}_{A_n}||_u^2 du$$

avec L constante positive. De plus (théorème 7), $N(X^k)$ et $N(X^n)$ sont finis, donc $E ||(X^k - X^n) \mathbf{1}_{A_n}||_t^2$ est borné sur $[t_0, T]$, et (corollaire I.8)

$$E \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^n(t)|^2 \mathbf{1}_{A_n} \right] = 0$$

ce qui entraîne le résultat cherché.

Nous pouvons alors construire un processus X de $\mathcal{E}[0, T]$ qui a p.s. les mêmes trajectoires que X^n lorsque $\omega \in A_n$.

Montrons que X est solution de (1). Par construction, il coïncide presque sûrement avec Φ pour $0 \leq t \leq t_0$. Comme X^n est solution de (1) pour la condition initiale Φ^{τ_n} , le résultat sera établi si l'on montre que chacun des termes suivants converge, au moins en probabilité, vers 0 :

- (i) $\Phi^{\tau_n}(t_0) - \Phi(t_0)$
- (ii) $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t [f(u, X^n) - f(u, X)] du \right|$
- (iii) $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t [g(u, X^n) - g(u, X)] dW(u) \right|$.

Les deux premiers convergent presque sûrement vers 0. Pour le 3ème terme, nous utilisons la propriété (iv) de l'intégrale stochastique, rappelée en 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $N > 0$,

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t [g(u, X^n) - g(u, X)] dW(u) \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq c' \left[\frac{N}{\varepsilon^2} + P \left(\int_{t_0}^T |g(u, X^n) - g(u, X)|^2 du > N \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour ε fixé, on peut rendre $\frac{N}{\varepsilon^2}$ arbitrairement petit, puis, compte tenu de la définition de X , le dernier terme, pour n suffisamment grand.

Le théorème est donc démontré.

Remarque 9

Compte tenu de la propriété d'unicité (théorème 6), nous avons démontré que si X est solution de (1) pour la condition initiale Φ , X^n solution de (1) pour la condition initiale Φ^n , presque sûrement X et X^n ont les mêmes trajectoires pour $\omega \in A_n$.

Corollaire 10

Si les fonctionnelles f et g sont globalement lipschitziennes et à croissance majorée, alors, pour toute condition initiale (t_0, Φ) , l'équation (1) admet une solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer les résultats précédents (existence et unicité) à des intervalles $[0, T_n]$ où $T_n \uparrow +\infty$ pour $n \uparrow +\infty$.

II.5. Existence et unicité de la solution pour des équations localement lipschitziennes

Théorème 11

Si les fonctionnelles f et g sont localement lipschitziennes et à croissance majorée, alors, pour toute condition initiale (t_0, Φ) , il existe un temps d'arrêt $\theta > t_0$ (à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$) et un processus X défini sur $[0, \theta[$, possédant les propriétés suivantes :

- (i) X est solution de (1) sur $[0, \theta[$ pour la condition initiale (t_0, Φ)
- (ii) Presque sûrement les trajectoires de X ne sont pas bornées si $\theta < +\infty$.
- (iii) Si Y est solution de (1) sur $I = [0, \sigma)$ pour la même condition initiale, alors, p.s., $I \subset [0, \theta[$ et les trajectoires de X et Y coïncident sur $I \cap [0, \theta[$.

Définition 12

Nous dirons que le processus X introduit dans le théorème 11 est une solution maximale de (1) et que θ est sa durée de vie ou son temps d'explosion.

Démonstration du théorème 11

Nous nous inspirons de la méthode utilisée dans la démonstration du théorème I.13. Pour cela, nous introduisons les fonctionnelles globalement lipschitziennes f_n et g_n . Ces fonctionnelles possèdent les propriétés (i) et (ii) énoncées au début de 2. Si f et g sont localement à croissance majorée, on vérifie immédiatement qu'elles sont globalement à croissance majorée.

Pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$(E_n) \quad dY(t) = f_n(t, Y) dt + g_n(t, Y) dW(t)$$

admet donc une solution X^n sur $[0, +\infty[$, pour la condition initiale (t_0, Φ) . Si τ_n désigne le temps d'entrée de X^n dans $\{\xi/|\xi| > n\}$ et si $\theta_n = \sup(t_0, \tau_n)$, alors X^n est solution de (1) sur $[[0, \theta_n]]$ pour la condition initiale (t_0, Φ) .

En effet, p.s., $X^n(t) = \Phi(t)$ pour $t \in [0, t_0]$ et pour $t \in [t_0, \theta_n]$,

$$\begin{aligned} X^n(t) &= \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t f_n(u, X^n) du + \int_{t_0}^t g_n(u, X^n) dW(u) \\ &= \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, X_n^n) du + \int_{t_0}^t g(u, X_n^n) dW(u) \end{aligned}$$

Mais pour $t_0 \leq s \leq \theta_n(\omega)$, $|X^n(s, \omega)| \leq n$, d'où

$$f(u, X_n^n(\omega)) = f(u, X^n(\omega))$$

$$g(u, X_n^n(\omega)) = g(u, X^n(\omega))$$

pour $u \in [t_0, \theta_n(\omega)]$, ce qui établit le résultat.

De plus, presque sûrement, pour n suffisamment grand, la suite θ_n est constante égale à $+\infty$ ou strictement croissante.

Soit en effet $k > n$. Alors (théorème 6) X^k et X^n ont presque sûrement les mêmes trajectoires sur $[[0, \inf(\theta_n, \theta_k)]]$. Donc, presque sûrement, si $\theta_k = t_0$, alors $\theta_n = t_0$ et si $\theta_k > t_0$, $\theta_k > \theta_n$ sauf si $\theta_n = +\infty$. La remarque ci-dessus résulte de ce que $\{\theta_n = t_0\} \downarrow \emptyset$ pour $n \uparrow +\infty$.

La suite θ_n converge donc (presque sûrement) vers un temps d'arrêt $\theta > t_0$. De plus, on peut construire un processus X défini sur $[[0, \theta[$ dont les trajectoires coïncident presque sûrement avec celles de X^n sur $[[0, \theta_n]]$. Le processus X est donc solution de (1) sur $[[0, \theta]]$ pour la condition initiale (t_0, ϕ) .

Pour établir (ii), nous remarquons que $\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ p.s. Or, si $\theta(\omega) < +\infty$ et si $X(t, \omega)$ est une fonction bornée de t , p.s. $\tau_n(\omega) > \theta(\omega)$ pour n suffisamment grand. Donc nécessairement $X(t)$ est presque sûrement non bornée pour $\theta < +\infty$.

La propriété (iii) est une conséquence presque immédiate de (ii) et du théorème d'unicité.

Théorème 13

Si les fonctionnelles f et g sont localement lipschitziennes et globalement à croissance majorée, alors, pour toute condition initiale ϕ , l'équation (1) admet une solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Démonstration

Supposons tout d'abord $|\phi(t, \omega)| \leq N$ sur $[0, t_0] \times \Omega$. Nous savons (démonstration du théorème 11) que si X^n est solution de l'équation (E_n) pour la condition initiale (t_0, ϕ) , X solution de (1) pour cette même condition initiale, τ_n le temps d'entrée de X^n dans $\{\xi/|\xi| > n\}$, alors X^n et X ont presque sûrement les mêmes trajectoires sur $[[0, \tau_n]]$, et $\tau_n \uparrow \theta$ p.s., où θ est le temps d'explosion de X .

Il suffit donc, pour démontrer le théorème, d'établir que, pour tout $T \geq t_0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[\sup_{t_0 \leq s \leq T} |X^n(s)| > n \right] = 0.$$

En effet, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\tau_n < T) = 0$, d'où p.s. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty$ (la suite τ_n étant croissante).

Nous avons, pour $n \geq N$, $t \in [t_0, T]$, presque sûrement

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |X^n(s)|^2 &\leq 3 \left[|\Phi(t_0)|^2 + (t-t_0) \int_{t_0}^t |f_n(u, X^n)|^2 du \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \int_{t_0}^t g_n(u, X^n) dW(u) \right|^2 \right] \end{aligned}$$

d'où (corollaire 2 et condition de croissance majorée)

$$E ||X^n||_t^2 \leq A(T) + B(T) \int_{t_0}^t E ||X^n||_u^2 du \quad \text{pour } t \in [t_0, T]$$

où $A(T)$ et $B(T)$ sont des constantes ≥ 0 , indépendantes de n . Nous avons alors (théorème 7 et lemme 1.7)

$$E ||X^n||_t^2 \leq A(T) e^{B(T)(t-t_0)} \quad t_0 \leq t \leq T$$

d'où

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t)|^2 \right] \leq L(T)$$

où $L(T)$ est une constante ≥ 0 , indépendante de n .

Etudions alors la probabilité de l'évènement

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X^n(t)| > n.$$

D'après ce qui précède,

$$n P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X^n(t)|^2 > n^2 \right) \leq L(T)$$

d'où

$$P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X^n(t)| > n \right) \leq \frac{L(T)}{n},$$

et le résultat cherché.

Le théorème pour Φ quelconque résulte alors de la première partie de la démonstration et du lemme suivant, qui étend la remarque 9 au cas des conditions locales.

Lemme 14

Sous les hypothèses du théorème 11, on pose, pour $t \in [0, t_0]$ $n \geq 1$,

$$\Phi^n(t) = \Phi(t \wedge \tau_n) \mathbf{1}_{\{\tau_n > 0\}}$$

où τ_n est le temps d'entrée de Φ dans $\{\xi/|\xi| > n\}$.

Si X et X^n sont des solutions maximales de (1) pour les conditions initiales respectives Φ et Φ^n , de temps d'explosion θ et θ_n , alors,

p.s. $\theta_n = \theta$ et les trajectoires de X^n et X coïncident sur

$$A_n = \{\omega / \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\Phi(t)| \leq n\}.$$

Démonstration du lemme

Les fonctionnelles f_k et g_k étant définies comme dans la démonstration du théorème 11, soit Y^k la solution de (E_k) : $dY(t) = f_k(t, Y) dt + g_k(t, Y) dW(t)$ (k entier ≥ 1) sur $[0, +\infty[$, pour la condition initiale (t_0, Φ) , et, de même, $Y^{n,k}$ la solution de (E_k) pour (t_0, Φ^n) . Il existe alors des suites $(\theta^k)_{k \geq 1}$ et $(\theta_n^k)_{k \geq 1}$ de temps d'arrêt tendant en croissant respectivement vers θ et θ_n et telles que, d'une part les processus Y^k et X sont presque sûrement les mêmes trajectoires sur $[0, \theta^k]$, et, d'autre part, la même propriété a lieu pour $Y^{n,k}$ et X^n sur $[0, \theta_n^k]$.

Le lemme sera démontré si l'on établit que, presque sûrement sur A_n , les trajectoires de Y^k et $Y^{n,k}$ coïncident. Mais, d'après la remarque 9, les trajectoires de Y^k et $Y^{n,k}$ coïncident presque sûrement sur $[0, T]$ pour tout $T \geq t_0$, si $\omega \in A_n$.

Ceci établit le résultat cherché.

Références

- [1] Gihman-Skorohod
Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1972.

- [2] Mac Shane
Stochastic Calculus and stochastic models, Academic Press, 1974.

- [3] Hale
Functional differential equations, Springer-Verlag, 1971.

- [4] Liptzer-Shyriaev
Statistique des processus stochastiques, Editions Nauka, Moscou 1974.

- [5] Mac Kean
Stochastic Integrals, Academic Press, 1969.

- [6] Meyer
Probabilités et potentiel, Hermann 1966.