

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

B. HEINKEL

Un théorème de la limite centrale dans $C(S)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 37-42

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_37_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE DANS $C(S)$

B. HEINKEL, UNIVERSITE DE STRASBOURG

Dans un certain nombre de publications récentes ([3] et [5] par exemple) il apparaît que la méthode de "recouvrement", introduite par R.M. Dudley [1] pour l'étude de la régularité des processus gaussiens, est également une méthode fructueuse dans la recherche de conditions suffisantes pour qu'une v.a. à valeurs dans $C(S)$ satisfasse au Théorème de la limite centrale. Nous nous proposons de montrer qu'il en est de même de la technique des mesures majorantes de X. Fernique [2] ; les résultats que nous obtiendrons ont pour corollaires les principaux énoncés connus précédemment.

Soient (S,d) un espace métrique compact et $C(S)$ l'espace des fonctions continues sur S à valeurs réelles, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On s'intéresse aux v.a. X à valeurs dans $C(S)$, centrées, telles que :

$$\sup_{s \in S} E X^2(s) < +\infty$$

On suppose de plus que l'écart τ sur S induit par la covariance de X , i.e. :

$$\forall s,t \in S \quad \tau(s,t) = (E(X(s) - X(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

est continu par rapport à d .

Donnons-nous à présent une suite (X_n) de v.a. indépendantes, de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et μ_n désigne la loi de la v.a. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

On dira que X satisfait au Théorème de la Limite Centrale s'il existe une mesure de probabilité gaussienne μ sur $C(S)$, telle que μ_n converge étroitement vers μ .

Avant d'énoncer le résultat principal, nous allons introduire quelques notations.

i) ρ sera un écart privilégié sur S , continu par rapport à d , tel que X soit ρ -continu, et dont la nature sera précisée ultérieurement.

ii) Pour tout $r > 0$ et tout $s \in S$, $B_\rho(s, r)$ désignera la ρ -boule ouverte de centre s et de rayon r .

iii) à toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, on associe $\tilde{f} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(s, t) = \frac{f(s) - f(t)}{\rho(s, t)} 1_{(\rho \neq 0)}(s, t)$$

iv) on notera φ la fonction : $t \rightarrow \sqrt{\text{Log } t}$.

v) Enfin, on désignera par (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi que X , définies sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$. On considérera d'autre part un autre espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ sur lequel on suppose construite une suite de Rademacher (ϵ_n) (i.e. une suite de v.a.r. indépendantes de même loi que ϵ où :

$$P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}) .$$

On notera $E_i (i = 1, 2)$ l'espérance calculée par rapport à la probabilité $P_i (i = 1, 2)$. On a l'énoncé suivant :

THEOREME. On suppose qu'il existe un écart ρ sur S , continu par rapport à d , tel que X soit ρ -continu et tel que de plus :

1) il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu ρ -borélienne) telle que :

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{x \in S} \int_0^\epsilon \varphi \left(\frac{1}{\lambda(B_\rho(x, u))} \right) du = 0$$

2) il existe une suite de v.a.r. indépendantes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ de même loi que T , T étant une v.a.r. ≥ 0 , de carré intégrable,

vérifiant :

$$\sup_n E_1 E_2 \log \int_{S \times S} \exp \left(\frac{\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k(s,t) \epsilon_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n T_k^2} \right) d\lambda(s) d\lambda(t) < +\infty$$

Sous ces hypothèses, X satisfait au théorème de la limite centrale.

Donnons l'idée de la démonstration (la rédaction détaillée est à paraître [4])

On peut remarquer tout d'abord que par le même argument que N.C. Jain et M.B. Marcus ([5] Lemme 2), on peut se restreindre au cas où X est symétrique. La symétrie de X , le théorème de la limite centrale en dimension finie et la continuité de ρ par rapport à d impliquent que la démonstration du théorème se réduit à établir que :

$\forall \epsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0 \quad P_1 \otimes P_2 \left\{ \sup_{\rho(s,t) \leq \alpha} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \epsilon_k (X_k(s) - X_k(t)) \right| \geq \epsilon \right\} \leq \eta$$

Ce résultat découle par des majorations élémentaires du lemme suivant :

LEMME DE CONTINUITE : Supposons l'hypothèse (1) du théorème vérifiée. Pour toute fonction : $S \rightarrow \mathbb{R}$, ρ -continue, telle que :

$$d = \int_{S \times S} \exp \tilde{f}^2(s,t) d\lambda(s) d\lambda(t) < +\infty$$

on a :

$$\forall x, y \in S \quad |f(x) - f(y)| \leq 20 \sup_{z \in S} \int_0^{\frac{\rho(x,y)}{2}} \varphi \left(\frac{d}{\lambda^2(B_\rho(z,u))} \right) du$$

Donnons pour finir quelques corollaires.

Remarque 1 : On obtient comme corollaires du théorème cité plus haut, les 2 énoncés principaux de N.C. Jain et M.B. Marcus [5] :

COROLLAIRE 1 : Supposons qu'il existe une v.a.r. $M \geq 0$, de carré intégrable et un écart ρ sur S , continu par rapport à d , vérifiant :

$$\forall s, t \in S \quad \forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega, s) - X(\omega, t)| \leq M(\omega) \rho(s, t)$$

On suppose de plus vérifiée la condition :

$$\int_0^\infty \varphi(N_\rho(u)) du < +\infty$$

(où $N_\rho(u)$ désigne le nombre minimal de ρ -boules de rayon u suffisant à recouvrir S) alors X satisfait au Théorème de la Limite Centrale.

COROLLAIRE 2. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

1) $\exists A > 0$ tel que :

$$\forall s, t \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad E\{\exp \alpha (X(s) - X(t))\} \leq \exp A \alpha^2 \tau^2(s, t)$$

$$2) \int_0^\infty \varphi(N_\tau(u)) du < +\infty$$

alors X satisfait au Théorème de la Limite Centrale.

Le corollaire 1 est une conséquence immédiate du Théorème.

Le corollaire 2 se démontre en établissant tout d'abord que X est τ -continu, puis en montrant que les hypothèses du Théorème sont satisfaites pour l'écart ρ défini par :

$$\rho = 3 \sqrt{A} \sup_{s, t} (\sup \tau(s, t), 1) \tau$$

et la v.a. T constante, égale à 1.

Remarque 2 : On voit (en modifiant légèrement la démonstration de la τ -continuité de X dans la preuve du corollaire 2), que la condition suffisante de continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire gaussienne de X . Fernique ([2] corollaire 6.2.3) l'est également pour les fonctions aléatoires séparables à accroissements sous-gaussiens (i.e. satisfaisant à la condition 1) du corollaire 2). De façon précise, on a l'énoncé :

PROPOSITION. Soient (S, d) un espace métrique compact et $(X(t), t \in S)$ une fonction aléatoire séparable, centrée, de carré intégrable. On suppose de plus que l'écart τ induit par la covariance de X est continu par rapport à d et qu'il existe une constante $A > 0$, telle que :

$$\forall s, t \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad E(\exp \alpha (X(s) - X(t))) \leq \exp A \alpha^2 \tau^2(s, t)$$

S'il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu τ -borélien) telle que :

$$(**) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{x \in S} \int_0^\epsilon \varphi\left(\frac{1}{\lambda(B_\tau(x, u))}\right) du = 0$$

alors X est à trajectoires p.s. continues.

Cet énoncé généralise le Théorème 3.1 de [6]. La condition (**) n'est par contre pas nécessaire pour qu'une fonction aléatoire X à accroissements sous-gaussiens soit à trajectoires p.s. continues comme le montre le contre-exemple considéré dans [4].

R E F E R E N C E S.

- [1] R.M. DUDLEY : The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes.
J. Functional Analysis 1 (1967) n° 3 p.290-330
- [2] X. FERNIQUE : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes - Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour 4 (1974)
Lecture Notes in Math. 480 Springer p. 1-96 .
- [3] E. GINE : On the central-limit theorem for sample continuous processes - The Ann. of. Prob. 2 (1974) n° 4 p. 629-641 .
- [4] B. HEINKEL : Mesures majorantes et Théorème de la Limite Centrale dans $C(S)$ (à paraître dans Z .
Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw.Gebiete)
- [5] N.C. JAIN et M.B. MARCUS : Central-Limit theorems for $C(S)$ - valued random variables.
J. Functional Analysis 19 (1975) p. 216-231 .
- [6] N.C. JAIN et M.B. MARCUS : Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series of functions.
Ann. Ins. Fourier 24 (1974) 2 p. 117-141

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG - Cédex