

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

T. GAVIN

**Études numériques et applications de processus  
d'approximation stochastique**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 94-109

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1976\\_\\_58\\_12\\_94\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_94_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ETUDES NUMERIQUES ET APPLICATIONS DE PROCESSUS D'APPROXIMATION STOCHASTIQUE

---

T. GAVIN , Université de Montréal (Canada)

I - Pour motiver notre travail sur l'approximation stochastique, prenons l'exemple du contrôle optimal d'un système dynamique linéaire décrit par

$$X_{n+1} = A X_n + B U_n + \xi_n$$

où  $X_n$  est l'état du processus à l'instant  $n$

$u_n$  est la commande introduite à l'instant  $n$

$\{\xi_n\}$  est une suite de variables aléatoires (v.a.) gaussiennes, à moyenne zéro et à variance bornée.

Nous faisons l'hypothèse que l'état initial  $X_0$  est indépendant des  $\xi_j$  et nous regardons l'évolution du processus sur l'intervalle de temps  $[0, N]$ .

Dans le cas où le critère "coût"

$$J(\gamma) = E_{X_0}^{\gamma} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} L(X_i, u_i) + \psi(X_N) \right\} \quad (1)$$

prend la forme quadratique

$$J(\gamma) = E_{X_0}^{\gamma} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} X_i' M X_i + u_i' N u_i + (X_N - X_T)' R_0 (X_N - X_T) \right\} \quad (2)$$

où  $\gamma = (u_0, \dots, u_{N-1})$  est une stratégie de commandes

$X_T$  est un état final désiré,

$$M = M^T, N = N^T, R = R^T, M \geq 0, R_0 \geq 0, N > 0$$

la commande optimale à l'instant  $n$ ,  $u_n^*$ , est bien connue : elle est une commande en feedback,  $u_n^* = -K_{N-n} X_n$ .

La matrice de gain  $K_i$  est obtenue à partir de la solution à une relation récursive de type Riccati. Lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,  $K_i \rightarrow K$  constante.

i) Si les fonctions  $L(., .)$  et  $\psi(., .)$  sont très complexes, nous perdons normalement la caractéristique de linéarité dans la représentation de la commande optimale.

ii) Supposons que nous puissions représenter la commande optimale. Dans de nombreux cas, elle est physiquement irréalisable ou réalisable à un coût prohibitif. Nous pouvons chercher une commande non optimale plus simple, par exemple une commande linéaire en feedback avec une matrice de gain constante.

Soit  $\mathcal{U}_{ad} = \{u(., .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ telle que } u(k) = Kx\}$ . Le problème devient alors

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u) = \min_K \hat{J}(K)$$

La fonctionnelle  $\hat{J}(., .)$  peut avoir plusieurs points stationnaires. De plus toute observation prise sur le processus est naturellement bruitée. Donc la valeur exacte de  $\hat{J}(K)$ , pour toute valeur de  $K$ , n'est pas connue.

Les remarques i) et ii) nous amènent à étudier le problème d'optimisation stochastique d'un point de vue non-classique. Nous allons examiner le problème abstrait ; mais le lien avec les problèmes de contrôle sera évident.

## II - Description de la procédure

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $H(y | x)$  une fonction de répartition définie pour chaque  $x$ . Soit

$$f(x) = \int_{\Omega} y dH(y | x), \quad |f| < \infty.$$

$Y$  est une v.a. telle que  $\int_{\Omega} (y - f(x))^2 dH(y | x) \leq \hat{\sigma}^2 < \infty$

Nous allons développer une théorie et quelques méthodes pratiques pour obtenir convergence presque sûre (p.s.) d'une suite de v.a. vers un point stationnaire de  $f(., .)$

Soit  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  une suite de v.a. qui seront les points initiaux de chaque cycle d'itération. Soit  $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$  la suite de v.a. qui seront les directions de recherche. Par exemple, au  $n^{\text{ième}}$  cycle, le point initial est  $X_n$ . Nous cherchons

un "meilleur" point sur  $\pm d_n$ , la durée de la recherche dépendant d'un critère. Soient  $X_0^n = X_n$  et  $X_1^n, X_2^n, \dots$  les itérés sur  $\pm d_n$ .

Soient

$$\beta^n = \sigma \{X_i^m, m = 0, 1, \dots, n-1; i = 0, \dots; d_1, \dots, d_{n-1}\}$$

$$\bar{\beta}^n = \sigma \{X_i^m, m = 0, 1, \dots, n-1; i = 0, \dots; d_1, \dots, d_n\}$$

$$\beta_1^n = \sigma \{X_i^m, m = 0, 1, \dots, n-1; i = 0, \dots; X_0^n, X_1^n, \dots, X_i^n\}$$

Soient  $\{b_i^n\}$  et  $\{e_i^n\}$  des suites de v.a. réelles non-anticipatives par rapport à  $\beta_1^n$ . Soient  $d_n, X_1^n$  donnés.

Nous prenons des observations sur le processus aux points  $X_1^n + d_n e_i^n$  et  $X_1^n - d_n e_i^n$ . Nous notons ces valeurs  $Y_{2i+1}^n$  et  $Y_{2i}^n$ , respectivement.

#### Définitions

$$DY(X_1^n, e_i^n, d_n) \equiv [Y_{2i+1}^n - Y_{2i}^n] / 2 e_i^n$$

$$Df(X_1^n, e_i^n, d_n) \equiv [f(X_1^n + d_n e_i^n) - f(X_1^n - d_n e_i^n)] / 2 e_i^n$$

$$\xi_1^n \equiv DY(X_1^n, e_i^n, d_n) - Df(X_1^n, e_i^n, d_n)$$

Le processus d'approximation stochastique sera défini par

$$X_{i+1}^n = X_i^n - d_n b_i^n (Df(X_i^n, e_i^n, d_n) + \xi_i^n) \quad (3)$$

#### Evolution des coefficients $\{b_j^n\}$ , $\{e_j^n\}$

Soient  $\{N_i\}_{i=0}^\infty$  une suite d'entiers, qui pourraient être des v.a. réelles non anticipatives par rapport à  $\beta^n$ , mais que nous prendrons déterministes.

Soient  $\{a_i^n\}$ ,  $\{c_i^n\}$  des suites de nombres positifs telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_n-1} a_i^n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_n-1} \left(\frac{a_i^n}{c_i^n}\right)^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_n-1} a_i^n \cdot c_i^n < \infty$$

$$a_i^n \rightarrow 0, c_i^n \rightarrow 0, \frac{a_i^n}{(c_i^n)^2} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n+i \rightarrow \infty$$

Supposons que nous soyons au cycle  $n$ . Pour les deux premiers itérés du cycle, c'est-à-dire  $X_0^n$  et  $X_1^n$ ,

$$b_1^n = b_0^n = a_0^n, \quad e_1^n = e_0^n = c_0^n.$$

Si le mouvement des itérés sur la droite passant par  $X_0^n$ , de direction  $d_n$ , est monotone croissant ou décroissant, les coefficients  $\{b_i^n\}$  et  $\{e_i^n\}$  ne changent pas, c'est-à-dire si

$$d_n' \cdot (X_{i+1}^n - X_i^n) \cdot d_n' \cdot (X_i^n - X_{i-1}^n) \geq 0,$$

$$\text{alors } b_{i+1}^n = b_i^n, \quad e_{i+1}^n = e_i^n.$$

Supposons que nous ayons le cas  $b_i^n = a_j^n, e_i^n = c_j^n$ . Si

$$d_n' \cdot (X_{i+1}^n - X_i^n) \cdot d_n' \cdot (X_i^n - X_{i-1}^n) < 0, \quad (4)$$

$$\text{alors } b_{i+1}^n = a_{j+1}^n, \quad e_{i+1}^n = c_{j+1}^n.$$

Règle d'arrêt : après  $N_n$  changements de signe, c'est-à-dire après que la relation (4) soit satisfaite  $N_n$  fois, le cycle est terminé.

Hypothèse 1 :

Nous faisons les hypothèses suivantes

$$(1) f(.) \in C^2(\mathbb{R}^n); \quad \inf f(x) \geq B > -\infty$$

$$\exists K_0 \text{ tel que } |y' f_{xx}(x) y| \leq K_0 |y|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

(2) Soient  $\delta > 0, \delta_1 > 0$ . Soit  $c$  un réel quelconque,  $d$  une direction quelconque. Posons

$$\Delta_\delta(c, d) = \{x \text{ tel que } |Df(x, c, d)| \leq \delta\}$$

$$\text{Si } X_i^n \in \Delta_\delta(e_i^n, d_n),$$

$$P_{\beta_i}^n \{ DY(X_i^n, e_i^n, d_n) > 0 \} \geq \delta_1$$

p.s.

$$P_{\beta_i}^n \{ DY(X_i^n, e_i^n, d_n) < 0 \} \geq \delta_1$$

(3) Soit  $D_0 = \{x : f_x(x) = 0\}$

Soit  $N : \mathbb{R}^n \setminus D_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue.

Pour  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  et  $n \geq N(f(X_n))$ ,

$$P_{\beta^n} \{ |d'_n \cdot f_x(X_n)| \geq \gamma_1 |f_x(x_n)| \} \geq \gamma_2$$

presque sûrement sur  $\{\omega : f_x(X_n(\omega)) \neq 0\}$ .

$$(4) E_{\beta_i^n} \xi_i^n = 0 \quad \text{p.s.}$$

$$E_{\beta_i^n} |\xi_i^n|^2 \leq \frac{\sigma^2}{(e_i^n)^2} \quad \text{p.s.}$$

### III - Théorème

Sous les hypothèses (1) à (4), la suite  $\{X_i^n\}$  définie par (3) converge presque sûrement vers  $D_0 \cup \{\infty\}$ . On a aussi  $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} D_0 \cup \{\infty\}$ .

Démonstration : Voir [1]. Voici étapes de la démonstration :

(i) Soit  $M_i^n$  le nombre d'indices  $j$  t.q.  $b_j^n = a_i^n$

Alors  $M_i^n < \infty$  p.s.

(ii) Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_\tau$  les valeurs des indices  $j$  t.q.

$$b_j^n = a_i^n \text{ et } X_j^n \in \Delta_\delta(c_i^n, d_n)$$

Alors  $E_{\beta_{\alpha_1}^n} \tau < \infty$  p.s. sur  $\{\omega : \tau(\omega) > 0\}$

(iii)  $\exists \{\beta_n\}$  t.q.  $E_{\beta_{\rho_1}^n} \sum_{n \geq \rho_1} \beta_n < \infty$  et

$$E_{\beta_m^n} |f(X_{m+1}^n) - f(X_m^n)| \leq \beta_m \quad \text{p.s.}$$

(iv) Soit  $O, O'$  deux ouverts dans  $\mathbb{R}^n$  t.q.

a)  $O \subset O'$

b) pour  $\bar{x} \in O$  tel que  $f_x(\bar{x}) \neq 0$

$$\frac{1}{2} \sup_{O'} |f_x(x)| \leq |f_x(\bar{x})| \leq 2 \inf_{O'} |f_x(x)|$$

$$(c) \inf_{\substack{x \in O \\ y \notin O'}} |x-y| \equiv d_0 > 0$$

Alors  $\exists \bar{n}$  tel que  $\sup_{x \in O'} N(f_x(x)) = \bar{n}$ .

Soient  $t_i = \min \{ l : X_l \in O, l \geq \max(\rho_1, \bar{n}) \}$

$$t_i^+ = \min \{ l : X_l^1 \notin O', l \geq t_i \}$$

$$t_j = \min \{ l : X_l \in O, l > t_{j-1}^+ \}$$

Alors  $t_j < \infty$  p.s.

IV - Nous voyons qu'il y a beaucoup de liberté dans la définition (1) de la procédure, du moment que la condition (3) des hypothèses est satisfaite par la direction  $d_n$ .

1° Le mouvement des itérés est régi par un test d'hypothèses :

Posons  $\theta_i^n = d_n' \cdot f_x(X_i^n)$

Si  $d_n' \cdot (X_{i+1}^n - X_i^n) > 0$ , posons  $W_i^n = +1$

Si  $d_n' \cdot (X_{i+1}^n - X_i^n) < 0$ , posons  $W_i^n = -1$

Définissons une v.a.  $L_i^n$  :

$$L_i^n(\theta_i^n) = P_{\theta_i^n}(W_i^n = -1) \text{ et nous faisons l'hypothèse que}$$

$$L_i^n(\theta_i^n) = P_{\beta_i^n}(W_i^n = -1). \text{ Nous utiliserons le schéma}$$

$$X_{i+1}^n = X_i^n + d_n b_i^n W_i^n = X_i^n + d_n b_i^n (1 - 2L_i^n(\theta_i^n)) + d_n b_i^n \xi_i^n \quad (5)$$

où

$$\xi_i^n = W_i^n - E(W_i^n | \theta_i^n).$$

La valeur de  $W_i^n$  sera obtenue à partir d'un test d'hypothèses :

$$H_0 : W_i^n = -1 \quad (\text{hypothèse nulle})$$

$$H_1 : W_i^n = +1$$

2° Le mouvement des itérés est régi par une moyenne des dérivées directionnelles.

Au lieu de prendre une estimée de la dérivée directionnelle, nous ferons plusieurs observations et nous ferons la moyenne :

$$X_{i+1}^n = X_i^n - b_i^n d_n \left[ \bar{\theta}_i^n + \bar{\xi}_i^n \right] \quad (6)$$

### 3° Une méthode générale

Soit  $\lambda_1^n(\cdot)$  t.q.  $\lambda_1^n(0) = 0$ ,  $y \lambda_1^n(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$ ,

$\lambda_1^n(\cdot)$  monotone non décroissant. Nous posons

$$X_{i+1}^n = X_i^n - b_i^n d_n \left[ \lambda_1^n(\theta_i^n) + \xi_i^n \right] \quad (7)$$

#### Hypothèse 2 :

(1) Pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n$  et pour chaque direction  $d$ ,  $f(\cdot)$  a un nombre fini de points stationnaires sur la ligne passant par  $x$  en directions  $\pm d$

$$(2) L_i^n(0) = 1/2 ; L_i^n(\cdot) \nearrow.$$

Soit  $\varphi(\cdot)$  une fonction continue à l'origine et ayant les caractéristiques des fonctions  $\lambda_1^n(\cdot)$ .

Pour tout  $\theta$  et  $i$ , nous supposons que

$$L_i^n(\theta) - \frac{1}{2} \leq \varphi(\theta), \quad \theta \geq 0$$

$$L_i^n(\theta) - \frac{1}{2} \geq \varphi(\theta), \quad \theta \leq 0$$

(Si  $\theta \ll 1$ , ceci garantit qu'il y a du "bruit" dans le système).

(3) Soit  $\psi(\cdot)$  une fonction ayant les caractéristiques de  $\varphi(\cdot)$ ,

Nous supposons que

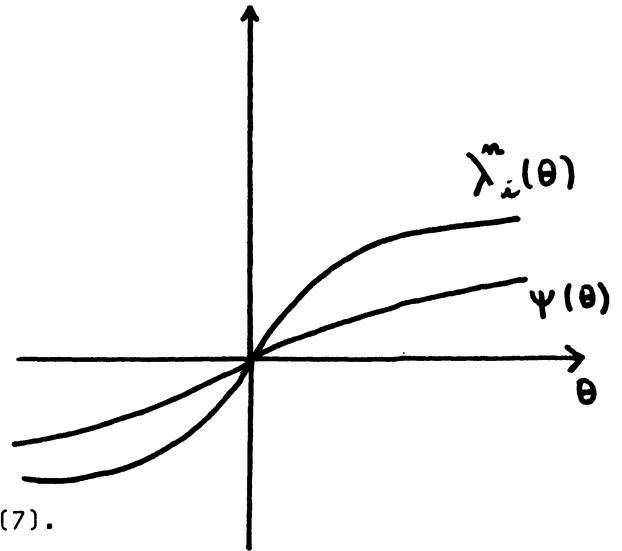
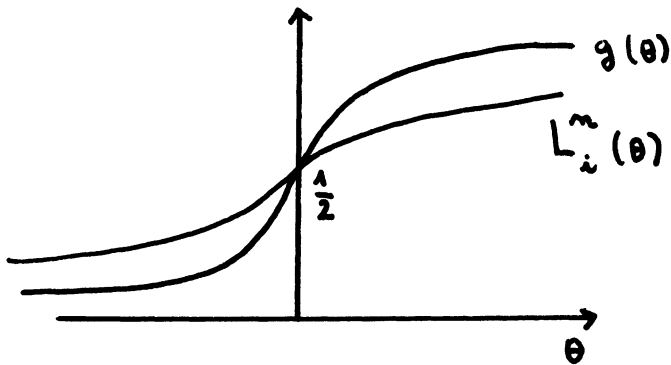
$$\lambda_1^n(\theta) \geq \psi(\theta), \quad \theta \geq 0$$

$$\lambda_1^n(\theta) \leq \psi(\theta), \quad \theta \leq 0$$



$$(4) \quad |\lambda_i^n(\theta)| \leq K_1 |\theta|$$

Par exemple :



Théorème :

On se donne les schémas (5), (6) ou (7).

Hypothèses 1.1, 1.3, (2.1) à (2.4). De plus,

$$\sum_n \sum_i a_i^n = \infty, \quad \sum_n \sum_i (a_i^n)^2 < \infty.$$

Si les  $\{X_i^n\}$  sont bornées p.s.,  $X_i^n \xrightarrow{\text{p.s.}} D_0$  et  $f(X_i^n)$  converge p.s. lorsque  $n + i \rightarrow \infty$ .

Démonstration : voir [2].

## V - Essais numériques

### a) Fonctions de régression

Les essais numériques ont été faits sur deux fonctions "coût"

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{9} x_2^2$$

et  $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 5.0 * g(x_1 - x_2^2)$ , où

$$g(u) = \begin{cases} u^2 & \text{si } |u| \leq 2.0 \\ 4u-4 & \text{si } u > 2.0 \\ -4u-4 & \text{si } u < -2.0. \end{cases}$$

b) Directions de recherche

(i) gradient 1 :

$$d_n = - (\nabla f(X_n) + \xi_n) \tag{8}$$

(ii) gradient 2 :

$$d_n = - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\nabla f(X_n) + \xi_n)_i \tag{9}$$

(iii) méthode d'accélération :

$$d_j = - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\nabla f(X_j) + \xi_j)_i$$

$$d_{j+1} = - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\nabla f(X_{j+1}) + \xi_{j+1})_i \tag{10}$$

$$d_{j+2} = (X_{j+2} - X_j)$$

Règle pour  $d_n$  = règle pour  $d_{n-3}$ .

(iv) Approximation stochastique classique

$$d_n = - (\nabla f(X_n) + \xi_n)$$

c) Choix des coefficients  $\{b_n\}$

(i) Option 1 : aucune borne sur les coefficients

(ii) Option 2 : borne supérieure seulement (UB)

(iii) Option 3 : borne inférieure seulement (LB)

(iv) Option 4 : bornes supérieures et inférieures (ULB)

Nous avons pris  $b_n = \frac{1}{n^\gamma}$

d) Règle d'arrêt : limite supérieure sur le nombre d'oscillations.

e) Le bruit : Les v.a.  $\xi_1^n \sim \mathcal{P}(0,1)$  pour la fonction  $f_1(\dots)$  ;

$\xi_1^n \sim \mathcal{P}(0,2.25)$  pour la fonction  $f_2(\dots)$ .

Voici quelques résultats numériques extraits de [3] .

RUN	(-) Ⓐ	(UB) Ⓑ	(ULB) Ⓑ	(ULB) Ⓑ
1	$.162 \times 10^{-2}$	$.406 \times 10^{-1}$	$.383 \times 10^{-1}$	$.215 \times 10^{-2}$
2	$.653 \times 10^{-2}$	$.225 \times 10^{-1}$	$.207 \times 10^{-1}$	$.299 \times 10^{-1}$
3	$.636 \times 10^{-2}$	$.116 \times 10^{-1}$	$.273 \times 10^{-1}$	$.416 \times 10^{-2}$
4	$.214 \times 10^{-1}$	$.949 \times 10^{-1}$	$.94 \times 10^{-1}$	$.853 \times 10^{-2}$
5	$.301 \times 10^{-1}$	$.236 \times 10^{-2}$	$.454 \times 10^{-2}$	$.155 \times 10^{-1}$
6	$.157 \times 10^{-2}$	$.268 \times 10^{-1}$	$.301 \times 10^{-1}$	$.12 \times 10^{-1}$
7	$.895 \times 10^{-2}$	$.492 \times 10^{-2}$	$.748 \times 10^{-2}$	$.388 \times 10^{-1}$
8	$.258 \times 10^{-3}$	$.27 \times 10^{-1}$	$.344 \times 10^{-1}$	$.306 \times 10^{-2}$
9	$.447 \times 10^{-1}$	.14	.124	$.219 \times 10^{-1}$
10	$.75 \times 10^{-1}$	.192	.169	$.971 \times 10^{-2}$

step-sizes  $\{b_n\} = 1/n^\gamma$  ; Ⓐ  $X_0 = (1.,1.)$  ; Ⓑ  $X_0 = (1.5,3.)$

(UB) : step-size upper bound ....

TABLE 1 - SIMULATION RESULTS FOR FOUR (KIEFER-WOLFOVITZ)-  
LIKE STOCHASTIC APPROXIMATION METHODS

Numbers indicated are the quadratic  
function values after 250 samples

Noise  $\sim N(0,1.0)$

	RUN	$\alpha_m =$	$\alpha_m =$	$\alpha_m =$	$\alpha_m =$	$\alpha_m =$	$\alpha_m =$	TERMINAL VALUE
		$2 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$	
STANDARD STOCHASTIC APPROXIMATION	1	30	35	73	211	234	239	$.162 \times 10^{-2}$
	2	28	32	37	227	234	243	$.653 \times 10^{-2}$
	3	39	40	49	204	241	243	$.636 \times 10^{-2}$
	4	113	190	212	231	239	243	$.214 \times 10^{-1}$
	5	151	180	219	241	246	249	$.3 \times 10^{-1}$
	6	37	64	138	146	207	237	$.157 \times 10^{-2}$
	7	62	70	145	201	238	-	$.895 \times 10^{-2}$
	8	14	14	63	74	87	210	$.258 \times 10^{-3}$
	9	145	202	215	226	232	248	$.447 \times 10^{-1}$
	10	183	197	217	240	248	248	$.75 \times 10^{-1}$
STOCHASTIC APPROXIMATION WITH UPPER BOUND ON THE GAIN EQUAL TO $8b_n$ .	1	118	158	214	234	-	-	$.406 \times 10^{-1}$
	2	86	140	158	240	249	-	$.225 \times 10^{-1}$
	3	78	174	207	238	240	243	$.116 \times 10^{-1}$
	4	197	212	220	232	244	248	$.949 \times 10^{-1}$
	5	30	44	138	211	242	243	$.236 \times 10^{-2}$
	6	122	173	199	221	243	248	$.268 \times 10^{-1}$
	7	87	125	174	220	233	-	$.492 \times 10^{-2}$
	8	46	102	181	245	249	-	$.27 \times 10^{-1}$
	9	203	222	232	245	247	249	.14
	10	209	221	238	248	248	249	.192

TABLE 2 - Cycle Index  $I_m$  for which

$$|f(X_i)| - |f(X_j)| \leq \alpha_m, \quad i > j \geq I_m$$

STOCHASTIC APPROXIMATION METHODS WITH GAIN SEQUENCE

$(b_n) = 1/n$

GAIN SEQUENCE = $1/n$	RUN	$2 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$	TERMINAL FUNCTION VALUE
	1	104	146	214	235	249	249	$.383 \times 10^{-1}$
2	76	140	212	239	249	249	$.207 \times 10^{-1}$	
3	101	190	219	239	243	-	$.273 \times 10^{-1}$	
4	194	213	230	245	247	-	$.94 \times 10^{-1}$	
5	51	54	160	239	245	-	$.454 \times 10^{-2}$	
6	127	181	200	221	243	248	$.301 \times 10^{-1}$	
7	104	129	202	221	235	-	$.748 \times 10^{-2}$	
8	72	158	191	246	249	-	$.344 \times 10^{-1}$	
9	203	223	234	245	247	249	.124	
10	203	218	238	248	249	249	.169	
GAIN SEQUENCE = $1/n^{2/3}$	1	145	220	247	248	-	-	$.216 \times 10^{-2}$
	2	241	249	-	-	-	-	$.299 \times 10^{-1}$
	3	175	238	239	240	-	-	$.416 \times 10^{-2}$
	4	190	243	244	249	-	-	$.853 \times 10^{-2}$
	5	184	219	248	-	-	-	$.155 \times 10^{-1}$
	6	214	221	249	-	-	-	$.12 \times 10^{-1}$
	7	236	247	-	-	-	-	$.388 \times 10^{-1}$
	8	188	209	237	249	-	-	$.306 \times 10^{-2}$
	9	179	249	-	-	-	-	$.219 \times 10^{-1}$
	10	233	237	239	248	249	249	$.971 \times 10^{-2}$

TABLE 3 - Cycle Index  $I_m$   $i > j \geq I_m$

$$|f(X_i)| - |f(X_j)| \leq \alpha_m$$

STOCHASTIC APPROXIMATION METHODS OF ULB TYPE.

	RUN	$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$	TERMINAL
		$2 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	VALUE
STOCHASTIC APPROXIMATION NO MINIMUM GAIN	1	114	143	247	248	$.165 \times 10^{-2}$
	2	115	238	246	-	$.32 \times 10^{-2}$
	3	168	173	238	239	$.119 \times 10^{-1}$
	4	137	210	212	244	$.636 \times 10^{-2}$
	5	151	185	190	217	$.326 \times 10^{-2}$
	6	86	215	221	236	$.441 \times 10^{-2}$
	7	73	173	247	-	$.2 \times 10^{-1}$
	8	184	186	188	209	$.442 \times 10^{-3}$
	9	61	195	249	-	$.113 \times 10^{-1}$
	10	198	233	234	239	$.449 \times 10^{-2}$
STOCHASTIC APPROXIMATION MINIMUM GAIN	1	114	143	200	247	$.126 \times 10^{-2}$
	2	115	241	245	-	$.396 \times 10^{-2}$
	3	168	173	238	239	$.102 \times 10^{-1}$
	4	137	210	243	244	$.387 \times 10^{-2}$
	5	151	185	212	218	$.412 \times 10^{-2}$
	6	86	214	221	236	$.482 \times 10^{-2}$
	7	58	173	-	-	$.189 \times 10^{-1}$
	8	184	186	188	209	$.265 \times 10^{-3}$
	9	61	126	228	-	$.103 \times 10^{-1}$
	10	198	233	234	235	$.432 \times 10^{-2}$

TABLE 4 - INDECES AS FOR TABLES (2) & (3);  
OBJECTIVE FUNCTION IS QUARTIC

$\gamma = 1$ UB	$\gamma = 1$ ULB	$\gamma = 2/3$ UB	$\gamma = 2/3$ ULB
$.165 \times 10^{-2}$	$.126 \times 10^{-2}$	$.534 \times 10^{-2}$	$.355 \times 10^{-2}$
$.319 \times 10^{-2}$	$.396 \times 10^{-2}$	$.9 \times 10^{-2}$	$.937 \times 10^{-2}$
$.119 \times 10^{-1}$	$.102 \times 10^{-1}$	$.156 \times 10^{-1}$	$.194 \times 10^{-1}$
$.635 \times 10^{-2}$	$.386 \times 10^{-2}$	$.414 \times 10^{-2}$	$.105 \times 10^{-2}$
$.326 \times 10^{-2}$	$.412 \times 10^{-2}$	$.142 \times 10^{-3}$	$.821 \times 10^{-4}$
$.44 \times 10^{-2}$	$.482 \times 10^{-2}$	$.271 \times 10^{-1}$	$.168 \times 10^{-1}$
$.2 \times 10^{-1}$	$.189 \times 10^{-1}$	$.487 \times 10^{-1}$	$.464 \times 10^{-1}$
$.44 \times 10^{-3}$	$.265 \times 10^{-3}$	$.48 \times 10^{-1}$	$.445 \times 10^{-1}$
$.113 \times 10^{-1}$	$.103 \times 10^{-1}$	.1105	.110
$.45 \times 10^{-2}$	$.432 \times 10^{-2}$	$.425 \times 10^{-4}$	$.549 \times 10^{-4}$

TABLE 5 - QUARTIC TERMINAL VALUES FOR STOCHASTIC APPROXIMATION SEARCH METHODS.

LEGEND:  $\gamma = (\cdot)$       Gain =  $1/n(\cdot)$   
 UB                      Upper bound  
 ULB                     Upper & Lower bounds

VI - Il arrive très souvent que, dans des problèmes d'automatique, les commandes soient assujetties à des contraintes. Le plus souvent, la commande doit prendre une valeur dans un compact dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons alors un problème d'optimisation stochastique avec contraintes.

Optimisation stochastique de système avec contraintes

Le problème que nous examinons est le suivant :

$$\text{soit } C = \{x : q^i(x) \leq 0, i=1, \dots, s\}$$

minimiser  $f(x)$ .  
 $x \in C$

Les observations prises de  $f(x)$  sont bruitées, mais non celles prises sur les contraintes. Nous développons un théorème basé sur la méthode de directions admissibles utilisée dans la programmation non-linéaire classique.

Théorème :

(i)  $f(.) \in C^2, \quad |f_x(.)| < \infty, \quad |f_{xx}(.)| < \infty.$

(ii)  $q^i(.) \in C^1; \quad C = \bar{C}$  et  $C$  compact.

(iii)  $\delta_1(.), \delta_2(.), g(.), n_1(.), c_1(.),$  des fonctions réelles, positives, non décroissante sur  $(0, \infty)$

(iv) Soit  $\alpha \in (0, 1]$ . Pour chaque  $\epsilon > 0, d_n$  satisfait à

$$P_{\beta_n} \left\{ \gamma(\alpha \epsilon, X_n, d_n) \leq -\delta_1(\epsilon) \geq \delta_2(\epsilon) \right\}$$

p.s. sur  $\{\omega : n(\omega) \geq n_1(-\epsilon, X_n), \gamma(\epsilon, X_n) \leq -\epsilon\}$

(v) Soit  $\beta'_n$  une suite de v.a. réelles telles que

$$E \sum_0^\infty |\beta'_n| < \infty. \text{ Pour } \{\beta'_n\} \text{ ainsi définie,}$$

$$E_{\beta_n} f(X_{n+1}) - f(X_n) \leq \beta'_n \quad \text{p.s.}$$

$$E_{\beta_n} f(X_{n+1}) - f(X_n) \leq -g(-\gamma(\epsilon, X_n, d_n)) + \beta'_n$$

p.s. sur  $\{\omega : n(\omega) \geq c_1(-\gamma(\epsilon, X_n, d_n)), \gamma(\epsilon, X_n, d_n) < 0\}$

Sous les hypothèses (i) à (v),  $\{X_n\} \xrightarrow{\text{P.S.}} \{x : \gamma(0, x) = 0\}$



Remarque : Soit  $S^* = \{d \in \mathbb{R}^n : |d^i| \leq 1, i=1 \dots n\}$

Nous définissons  $J_\epsilon(x) = \{0\} \cup \{i \text{ t.q. } q^i(x) \geq -\epsilon\}$

$$\gamma(\epsilon, X, d) = \max_{i \in J_\epsilon(X)} \langle \nabla q^i(X), d \rangle$$

$$\gamma(\epsilon, X) = \min_{d \in S^*} \gamma(\epsilon, X, d)$$

La condition  $\gamma(0, \hat{X}) = 0$  est équivalente à la condition nécessaire de Fritz-John pour l'optimalité de  $X$ .

Démonstration : Voir [4]. Pour des résultats numériques, voir [4].

#### B I B L I O G R A P H I E

GAVIN et KUSHNER :

- [1] Annals of Statistics, Vol. 1, n°5, 1973, pp. 851-862
- [2] International Journal of Control, Vol. 18, n°5, pp. 963-975

GAVIN T. :

- [3] PhD thesis, Brown University, 1974
- [4] IEEE. Transactions on automatic control, AC-19, n°4, 1974, pp. 349-357.