

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

P. FARJOT

**Existence et unicité du maximum d'une forme linéaire sur  
un ensemble de matrices diagonales**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 184-194

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1976\\_\\_58\\_12\\_184\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_184_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE ET UNICITE DU MAXIMUM D'UNE FORME  
LINEAIRE SUR UN ENSEMBLE DE MATRICES DIAGONALES

P. FARJOT , Université de Clermont

Introduction

Nous nous proposons de donner dans cet article une démonstration simplifiée d'un résultat énoncé par Monique HAKIM, Eric Olivier LOCHARD, Jean-Pierre OLIVIER et Eric TEROUANNE de Montpellier, dans un papier intitulé "sur les traces de Spearman I" ([3]). Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  symétrique semi-définie positive, nous lui associons l'ensemble  $G_I(A)$  des matrices diagonales  $D$  à termes positifs ou nuls telles que  $A - D$  soit semi-définie positive, et nous montrons que toute forme linéaire  $T$  sur  $\mathbb{R}^n$  strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+n}$  atteint son maximum sur  $G_I(A)$  en un point et un seul. Notre démonstration permet aussi d'étendre ce résultat à une forme linéaire ne s'annulant sur aucun des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous tenons à remercier le Professeur Gérard LETAC qui nous a signalé [3] et nous a guidé par ses conseils.

Notations et Définitions

Dans toute la suite nous noterons  $I$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $P_I$  (respectivement  $P_I^*$ ) l'ensemble des matrices  $n \times n$  réelles symétriques, semi-définies positives (respectivement définies positives).

L'ensemble  $D_I$  (respectivement  $D_I^+$ ) des matrices  $n \times n$  réelles, diagonales (respectivement diagonales à termes  $\geq 0$ ), sera identifié à  $\mathbb{R}^I$  (respectivement à un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^I$ ). Nous écrirons indifféremment

$\mathbb{R}^I$  ou  $\mathbb{R}^n$  et nous noterons  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous noterons  $A(i, j)$  les éléments d'une matrice  $A$  de  $P_I$  ( $(i, j) \in I \times I$ ) et  $D(i)$  ceux d'une matrice  $D$  de  $D_I$  ( $i \in I$ ).  $|J|$  désignera le nombre d'éléments d'un ensemble  $J$ .

### Définition

Une forme linéaire  $T$  sur  $D_I$  sera dite *strictement positive* si pour tout  $D$  de  $D_I^+$  non nul, on a  $TD > 0$ .

Un élément  $A$  de  $P_I$  et une forme linéaire  $T$  sur  $\mathbb{R}^I$  étant donnés, nous leur associerons les deux ensembles suivants :

$$G_I(A) = \{D \in D_I^+ ; A - D \in P_I\} ;$$

$$S_T(A) = \{D \in G_I(A) ; \forall d \in G_I(A) \quad Td \leq TD\}.$$

### Remarque

Avec les notations ci-dessus, le résultat que nous nous proposons de démontrer s'énonce : "si  $A$  est dans  $P_I$  et si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  strictement positive, alors  $S_T(A)$  est un ensemble réduit à un élément".

### § 1 - Résultats préliminaires

Dans tout ce § ,  $A$  désignera un élément de  $P_I$  et  $T$  une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$ .

#### Proposition 1.1

$G_I(A)$  est une partie compacte convexe non vide de  $\mathbb{R}^I$ .

Preuve.  $G_I(A)$  est non vide puisqu'il contient 0.

1°) Montrons que  $G_I(A)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^I$ .

Si  $J$  est un sous-ensemble non vide de  $I$ , notons  $f_J$  l'application continue définie sur  $D_I$  par  $f_J(D) = \det(A-D)_J$ , mineur principal d'ordre  $J$  de  $A - D$ . Avec ces notations, on a ([2]) :

$$G_I(A) = \bigcap_{\substack{J \neq \emptyset \\ J \subset I}} f_J^{-1}([0, +\infty[) \cap D_I^+,$$

et  $G_I(A)$  est donc un fermé de  $\mathbb{R}^I$ .

2°) Montrons que  $G_I(A)$  est un borné de  $\mathbb{R}^I$ .

Pour tout  $i$  de  $I$ ,  $D(i) \geq 0$  et  $A(i, i) - D(i) = \det(A-D)_{\{i\}} \geq 0$ , donc

$$G_I(A) \subset \bigcap_{i=1}^n [0, A(i, i)] ,$$

et par suite  $G_I(A)$  est borné.

3°) On déduit immédiatement de 1°) et 2°) que  $G_I(A)$  est un compact de  $\mathbb{R}^I$ .

4°)  $P_I$  est un cône convexe, donc  $G_I(A) = \{D \in D_I^+ ; D \leq A\}$  est convexe, avec  $\leq$  la relation définie sur  $P_I$  par

$$A \leq B \text{ si et seulement si } B - A \in P_I.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède, la proposition suivante qui représente en fait la première partie du résultat que nous nous proposons de démontrer (existence d'au moins un maximum pour  $T$  sur  $G_I(A)$ ), et qui est vraie pour une forme linéaire  $T$  arbitraire sur  $\mathbb{R}^I$  (non nécessairement strictement positive) :

Proposition 1.2

$S_T(A)$  est un ensemble non vide.

Preuve.  $T$  étant une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , est continue; de plus, étant une fonction numérique continue sur le compact non vide  $G_I(A)$ , elle y est bornée et atteint ses bornes, d'où la proposition.

Remarque 1.1

La proposition 1.2 peut aussi s'exprimer sous la forme: "l'hyperplan  $H_T(A) = \{D \in \mathbb{R}^I ; TD = \sup_{d \in G_I(A)} Td\}$  est un hyperplan d'appui ([1]) de  $G_I(A)$ ".

Notons une autre propriété de l'ensemble  $S_T(A)$  associé à une forme linéaire arbitraire  $T$  sur  $\mathbb{R}^I$  :

Proposition 1.3

$S_T(A)$  est un convexe compact de  $\mathbb{R}^I$ .

Preuve.  $S_T(A)$  est convexe compact car intersection du convexe compact  $G_I(A)$  par l'hyperplan  $H_T(A)$  défini dans la remarque 1.1.

Les deux propositions qui suivent sont établies sous des hypothèses beaucoup plus restrictives pour  $T$ , puisque nous choisissons dans ce qui suit  $T$  strictement positive.

Proposition 1.4

Si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  strictement positive, alors tout élément  $D$  de  $S_T(A)$  vérifie la relation  $\det(A - D) = 0$ .

Preuve. Posons  $G_I^*(A) = \{D \in D_I^+ ; A - D \in P_I^*\}$ . Avec les notations de la proposition 1.1, on a ([2]) :

$$G_I^*(A) = \bigcap_{\substack{J \neq \emptyset \\ J \subset I}} f_J^{-1}(]0, +\infty[) \cap D_I^+ ;$$

donc  $G_I^*(A)$  est la trace sur  $D_I^+$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^I$ .

Soit  $D$  dans  $S_T(A)$  ; il vérifie  $\det(A - D) \geq 0$  puisque  $A - D$  est dans  $P_I$ . Supposons  $\det(A - D) > 0$ , c'est-à-dire  $D$  dans  $G_I^*(A)$  ; on peut alors trouver un élément non nul  $D'$  de  $D_I^+$  tel que  $D + D'$  soit dans  $G_I^*(A)$  ; donc puisque  $T$  est strictement positive, on a :

$$T D' > 0 \quad \text{et} \quad T(D + D') = T D + T D' > T D ,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que  $D + D'$  est dans  $G_I(A)$  et  $D$  dans  $S_T(A)$  (et par conséquent que  $T(D + D') \leq T D$ ). L'hypothèse  $\det(A - D) > 0$  est donc fautive, d'où la proposition.

#### Proposition 1.5

Si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  strictement positive, il existe une partie  $J$  non vide de  $I$  telle que la projection canonique de  $S_T(A)$  sur  $\mathbb{R}^J$  soit réduite à un point.

#### Remarque 1.5

La proposition 1.5 peut s'exprimer aussi sous la forme : il existe au moins un indice  $i$  de  $I$  tel que, pour tous  $D$  et  $D'$  de  $S_T(A)$ ,  $D(i) = D'(i)$ .

La preuve de la proposition 1.5 découle immédiatement de la convexité de  $S_T(A)$  et des deux lemmes suivants :

#### Lemme 1.1

Si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  strictement positive, alors deux quelconques des éléments de  $S_T(A)$  ont au moins une même coordonnée.

Preuve. Soient  $D$  et  $D'$  dans  $S_T(A)$ . Montrons qu'il existe  $i$  dans  $I$  tel que  $D(i) = D'(i)$ .  $S_T(A)$  étant convexe,  $D_\lambda = \lambda D + (1-\lambda) D'$  est élément

de  $S_T(A)$  pour tout  $\lambda$  dans  $[0, 1]$  ; donc, d'après la proposition 1.4,  $\det(A - D_\lambda) = 0$  pour tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$ . Or  $\det(A - D_\lambda)$  est un polynôme en  $\lambda$  ; donc le coefficient de son terme de plus haut degré en  $\lambda$  est nul ; par conséquent  $\prod_{i \in I} (D'(i) - D(i)) = 0$ , et par suite il existe au moins un indice  $i$  tel que  $D'(i) = D(i)$ .

Lemme 1.2

Si  $S$  est un convexe non vide de  $\mathbb{R}^I$  tel que deux quelconques de ses éléments ont au moins une même coordonnée, il existe une partie  $J$  non vide de  $I$  telle que la projection canonique de  $S$  sur  $\mathbb{R}^J$  soit réduite à un point.

Preuve. Etant donnés deux éléments  $s = (s_i)_{i \in I}$  et  $s' = (s'_i)_{i \in I}$  de  $S$ , nous noterons

$$J(s, s') = \{i \in I ; s_i = s'_i\},$$

$$\text{et } k = \inf_{(s, s') \in S \times S} |J(s, s')|.$$

Par hypothèse, on a  $k > 0$ . Soient  $s^{(1)}$  et  $s^{(2)}$  dans  $S$  tels que  $k = |J(s^{(1)}, s^{(2)})|$  ; nous noterons par  $J$  l'ensemble  $J(s^{(1)}, s^{(2)})$  pour simplifier. Nous allons montrer que pour tout  $i$  de  $J$  et tout  $s$  de  $S$ ,  $s_i = s_i^{(1)}$ , ce qui impliquera a fortiori le lemme. Raisonnons par l'absurde : si ce résultat était faux, il existerait  $i_0$  dans  $J$  et  $s^{(0)}$  dans  $S$  tels que  $s_{i_0}^{(0)} \neq s_{i_0}^{(1)}$ . Posons alors :

$$J_\lambda = \{i \in I ; \lambda s_i^{(1)} + (1-\lambda) s_i^{(2)} = s_i^{(0)}\} \text{ si } \lambda \in [0, 1] \quad (*),$$

$$E_i = \{\lambda \in [0, 1] ; \lambda s_i^{(1)} + (1-\lambda) s_i^{(2)} = s_i^{(0)}\} \text{ si } i \notin J \quad (**).$$

Comme  $S$  est convexe, pour tout  $\lambda$  dans  $[0, 1]$   $\lambda s^{(1)} + (1-\lambda) s^{(2)}$  est dans  $S$  et par conséquent  $|J_\lambda| \geq |J|$  ; d'autre part, quelque soit  $\lambda$  dans  $[0, 1]$ ,  $i_0$  n'est pas dans  $J_\lambda$  ; par conséquent, pour tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$ ,

on peut trouver au moins un élément, soit  $i_\lambda$ , dans  $J_\lambda \setminus J$ ; c'est-à-dire, en revenant aux définitions (\*) et (\*\*), pour tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$  on peut trouver un élément  $i_\lambda$  de  $I_1 = I \setminus J$  tel que  $\lambda$  appartienne à  $E_{i_\lambda}$ ; autrement dit  $(E_{i_\lambda})_{i \in I_1}$  constitue un recouvrement de  $[0, 1]$ . On en déduit l'existence d'au moins un élément de  $I_1$ , soit  $i_1$ , tel que  $E_{i_1}$  possède au moins 2 points  $\lambda$  et  $\lambda'$  distincts; mais alors

$$s_{i_1}^{(0)} = \lambda s_{i_1}^{(1)} + (1-\lambda) s_{i_1}^{(2)} = \lambda' s_{i_1}^{(1)} + (1-\lambda') s_{i_1}^{(2)},$$

ce qui entraîne  $s_{i_1}^{(1)} = s_{i_1}^{(2)}$ , c'est-à-dire  $i_1$  est élément de  $J$ . On arrive à une contradiction puisque  $i_1$  est dans  $I_1 = I \setminus J$ . Le lemme 1.2 est donc vrai.

Remarque 1.6

Le lemme 1.2 est faux si l'on ne suppose pas  $S$  convexe.

Exemple :  $I = \{1, 2, 3\}$ ;  $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ .

§ 2 - Le théorème

Dans tout ce paragraphe,  $A$  désignera encore un élément de  $P_I$  et  $T$  une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$ . De plus, si  $J$  est une partie non vide de  $I$ , nous identifierons  $\mathbb{R}^J$  à un sous-espace de  $\mathbb{R}^I$  (nous noterons de la même façon un élément de  $\mathbb{R}^J$  et l'élément de  $\mathbb{R}^I$  construit en attribuant la valeur zéro à toutes les coordonnées d'indice dans  $I \setminus J$ ); de même, nous identifierons  $P_J$  à un sous-ensemble de  $P_I$  (et nous noterons de la même façon un élément  $B$  de  $P_J$  et l'élément de  $P_I$  construit en posant  $B(i, j) = 0$  si  $(i, j)$  n'est pas dans  $J \times J$ ); nous utiliserons enfin les notations suivantes :

Notation 1 : si  $D$  est un élément de  $\mathbb{R}^I$ ,  $\Pi_J(D)$  désignera sa projection canonique sur  $\mathbb{R}^J$ .

Notation 2 : si B est un élément de  $P_I$ ,  $\Pi_J(B)$  désignera l'élément de  $P_J$  tel que, pour tout x de  $\mathbb{R}^J$

$$(1) \quad \langle \Pi_J(B) x, x \rangle = \inf_{y \in \mathbb{R}^{I \setminus J}} \langle B(x+y), x+y \rangle,$$

où  $\langle Bz, z \rangle$  désigne la valeur au point z de  $\mathbb{R}^I$  de la forme quadratique associée à B.

Remarque 2.1

Il est facile de voir que (1) définit bien une matrice semi-définie positive  $\Pi_J(B)$  qui est la borne supérieure (pour la relation  $\leq$  introduite dans la preuve de la proposition 1.1), de l'ensemble  $\{C \in P_J ; C \leq B\}$ .

Remarque 2.2

Les notations 1 et 2 coïncident pour un élément de  $D_I^+$  (compte tenu de l'identification de  $D_I^+$  avec un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^I$ ).

Notation 3 : si J est une partie non vide de I, nous noterons  $T_J$  la restriction de T à l'ensemble  $\mathbb{R}^J$ .

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le lemme suivant, valable pour une forme linéaire arbitraire T sur  $\mathbb{R}^I$  :

Lemme 2.1

Soit (J, K) une partition de l'ensemble I supposé de cardinal  $\geq 2$ .

Alors

- 1) si D est dans  $G_I(A)$ , la section de  $G_I(A)$  au point  $\Pi_J(D)$  (suivant  $\mathbb{R}^K$ ) est égale à  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$  ;

ii) si  $D$  est dans  $S_T(A)$ , la section de  $S_T(A)$  au point  $\Pi_J(D)$  (suivant  $\mathbb{R}^K$ ) est contenue dans  $S_{T_K}(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ .

Preuve.

i) Soit  $F = \{ \Delta \in \mathbb{R}^K ; \Delta + \Pi_J(D) \in G_I(A) \}$  la section de  $G_I(A)$  au point  $\Pi_J(D)$ . Montrons d'abord que  $F$  est inclus dans  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ . Soit  $\Delta$  dans  $F$  ;  $\Delta + \Pi_J(D)$  est dans  $G_I(A)$ , donc  $\Delta \leq A - \Pi_J(D)$ . D'après la remarque 2.1, on a  $\Delta \leq \Pi_K(A - \Pi_J(D))$ , ce qui signifie que l'élément  $\Delta$  de  $D_K^+$  appartient à  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ .

Montrons maintenant que  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$  est inclus dans  $F$ . Soit  $\delta$  dans  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$  c'est-à-dire  $\delta \leq \Pi_K(A - \Pi_J(D))$  ; d'après la remarque 2.1,  $\Pi_K(A - \Pi_J(D)) \leq A - \Pi_J(D)$ , donc  $\delta \leq A - \Pi_J(D)$  et par suite  $\delta$  est un élément de  $\mathbb{R}^K$  tel que  $\delta + \Pi_J(D)$  est dans  $G_I(A)$ , donc  $\delta$  est dans  $F$ .

ii) Soit  $\Delta$  dans la section de  $S_T(A)$  au point  $\Pi_J(D)$  ; donc  $\Delta$  est dans  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ . Pour tout  $\delta$  de  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ ,  $\delta + \Pi_J(D)$  est dans  $G_I(A)$  d'après i), et comme  $\Delta + \Pi_J(D)$  est dans  $S_T(A)$ , on a :

$$T(\delta + \Pi_J(D)) = T(\delta) + T(\Pi_J(D)) \leq T(\Delta + \Pi_J(D)) = T(\Delta) + T(\Pi_J(D))$$

et par conséquent :

$$T(\delta) = T_K(\delta) \leq T(\Delta) = T_K(\Delta)$$

L'élément  $\Delta$  de  $G_K(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$  est donc dans  $S_{T_K}(\Pi_K(A - \Pi_J(D)))$ .

Théorème 2.1

Si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  strictement positive, pour tout élément  $A$  de  $P_I$  l'ensemble  $S_T(A)$  des points où  $T$  atteint son maximum sur  $G_I(A)$  est réduit à un point.

Preuve. Procédons par récurrence sur la taille  $n$  de  $I$ , en remarquant que le théorème est trivialement vrai pour  $n = 1$  et en supposant (hypothèse de récurrence) que, pour  $K$  de taille  $< n$ , non vide, toute forme linéaire  $T_K$  sur  $\mathbb{R}^K$  strictement positive, et tout élément  $A_K$  de  $P_K$ , l'ensemble  $S_{T_K}(A_K)$  est réduit à un point.

D'après la proposition 1.5, il existe une partie finie non vide  $J$  de  $I$  telle que  $\Pi_J(S_T(A))$  est réduit à un point ; soit  $D_0$  ce point ; posons  $K = I \setminus J$  et  $A_K = \Pi_K(A - D_0)$ . Si  $K$  est non vide (le cas  $K = \emptyset$  donne aussitôt le théorème), d'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble  $S_{T_K}(A_K)$  est réduit à un point ; or, d'après le lemme 2.1,  $S_{T_K}(A_K)$  contient la section de  $S_T(A)$  au point  $D_0 = \Pi_J(D)$  (suivant  $\mathbb{R}^K$ ) et cette section est égale d'après la définition de  $D_0$ , à  $S_T(A) - \{D_0\}$  qui est non vide ; par suite  $S_T(A) - \{D_0\}$  est réduit à un point et donc  $S_T(A)$  aussi.

Corollaire 2.1

Si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^I$  ne s'annulant sur aucun des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^I$ , pour tout élément  $A$  de  $P_I$  l'ensemble  $S_T(A)$  des points où  $T$  atteint son maximum sur  $G_I(A)$  est réduit à un point.

Preuve. Soit  $I' = \{i \in I ; T(e_i) < 0\}$  et  $I'' = I \setminus I'$ .

1er cas :  $I' = I$ . Alors  $S_T(A) = \{0\}$ . En effet soit  $D$  dans  $S_T(A)$  et supposons non vide l'ensemble  $\{i \in I ; D(i) > 0\}$  ; comme  $0$  est dans  $G_I(A)$ , on a

$$T(0) = 0 \leq T(D) = \sum_{i \in I} D(i) T(e_i) = \sum_{i \in I ; D(i) > 0} D(i) T(e_i) < 0,$$

ce qui est impossible ; donc  $\{i \in I ; D(i) > 0\}$  est vide, c'est-à-dire  $D = 0$ .

2ème cas :  $I' = \emptyset$ . Alors  $T$  est strictement positive : c'est le théorème 2.1.

3ème cas :  $(I', I'')$  est une partition de  $I$ . D'après le théorème 2.1,  $S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A))$  est réduit à un point, soit  $\Delta$ . Nous allons montrer que  $S_T(A) = \{\Delta\}$ . Soit  $D$  arbitraire dans  $S_T(A)$  (que l'on sait non vide) ; alors on a :

a)  $\Pi_{I'}(D) = 0$  ; en effet, d'après le lemme 2.1,  $\Pi_{I'}(D)$  est dans  $S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A - \Pi_{I''}(D)))$ , ensemble qui, d'après l'étude du premier cas est égal à  $\{0\}$ .

b)  $\Pi_{I''}(D) = \Delta$  ; en effet, toujours en utilisant le lemme 2.1,  $\Pi_{I''}(D)$  est dans  $S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A - \Pi_{I''}(D))) = S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A)) = \{\Delta\}$ .

Par conséquent, on a bien  $S_T(A) = \{\Delta\}$ .

#### REFERENCES

- [1] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Hermann (1966)  
2ème édition revue et corrigée, II.5.2.
- [2] F.R. GANTMACHER, Théorie des matrices 1, Dunod (1966), chapitre 10.
- [3] M. HAKIM, E.O. LOCHARD, J.P. OLIVIER, E. TEROUANNE, Sur les traces de Spearmann (I), Montpellier (1972), multigraphié.