

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

L. SCHMETTERER

**Sur quelques résultats asymptotiques pour le processus  
de Robbins-Monro**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 166-176

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1976\\_\\_58\\_12\\_166\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_166_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES RESULTATS ASYMPTOTIQUES POUR  
LE PROCESSUS DE ROBBINS-MONRO.

L. SCHMETTERER , Université de Vienne (Autriche)

I - Soient H un hilbert séparable et  $\{X_i\}$  et  $\{Y_i\}$  deux suites d'éléments aléatoires qui prennent leurs valeurs dans H. On suppose que  $E(\|Y_n\|)$  existe pour  $n \geq 1$ , où  $\|\bullet\|$  désigne la norme de H. Par  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  on désigne le produit scalaire dans H.

Soit  $E(Y_i | X_1, \dots, X_i) = M(X_i)$ ,  $i \geq 1$ , p.s. où M est une application mesurable de H dans H.

Soit  $\{a_n\}$  une suite de réels positifs. Si la relation :

$$X_{n+1} = X_n - a_n Y_n \tag{1.1}$$

est satisfaite pour tous les  $n \geq 1$  alors  $\{X_n\}$  est appelée processus de Robbins-Monro.

Les propriétés de ce processus ont été étudiées presque toujours sous la condition :

$$c_n = E(\|Y_n - M(X_n)\|^2) \leq c_1 \tag{1} \quad , \quad n \geq 1 \tag{1.2}$$

Il est vrai que dans un travail de Gladyshev [1] on suppose que :

$$E(\|Y_n - M(X_n)\|^2 | X_1, \dots, X_n) \leq c_2 + c_3 \|X_n\| + c_4 \|X_n\|^2, \text{ p.s. mais Gladyshev}$$

montre au cours de ce travail que  $E(\|X_n\|^2) \leq c_5$  c'est à dire qu'on est ramené

à la condition (1.2).

Souvent on choisit  $a_n = n^{-1}$  de sorte que la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{1.3}$$

(1)  $c_1, c_2, \dots$  désignent toujours des constantes positives.

est satisfaite. Nous étudierons quelques propriétés asymptotiques du processus défini par (1.1) pour des suites  $\{c_n\}$  et  $\{a_n\}$  qui ne satisfont la condition (1.2.) respectivement la condition (1.3). Nous considérons surtout le comportement à l'infini de la suite  $P ( ||X_n|| \geq \epsilon )$  pour un  $\epsilon > 0$ . Pour cela on s'occupera de la convergence de  $\{X_n\}$  en moyenne en rappelant quelques résultats qui se trouvent déjà dans [2] . Puis nous comparerons ces résultats à des théorèmes que l'on peut obtenir en utilisant une légère extension d'une méthode due à Révész [3], [4]. Dans nos développements nous utiliserons quelques idées qui appartiennent à l'analyse classique, notamment à la théorie de sommabilité des suites. Soit  $\mathcal{B}$  une matrice infinie.

Soit :

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ une suite de nombres réels.}$$

Si  $t = \mathcal{B}. s$  existe et si  $\{t_n\}$  converge, alors  $s$  est dite  $\mathcal{B}$ -sommable.  $\mathcal{B}$  est nommée permanente si toute suite  $\{s_n\}$  convergente vers une limite finie est  $\mathcal{B}$ -sommable et si de plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ . Si c'est vrai aussi pour  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$  alors  $\mathcal{B}$  est appelée totalement permanente.

Soit  $\{a_n\}$  une suite positive satisfaisant à la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad 0 < a_i < 1, \quad i \geq 1. \tag{1.4}$$

Il est facile de voir que la matrice  $\mathcal{A}_1 = \left\{ a_i \prod_{j=i+1}^n (1-a_j) \right\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n \geq 1}}$  est permanente. Si on remplace  $a_i$  par  $\alpha a_i$ ,  $i \geq 1, \alpha > 0$  on obtient la matrice  $\mathcal{A}_\alpha$  qui est aussi naturellement permanente. Puisque les éléments de  $\mathcal{A}_\alpha$  sont positifs,  $\mathcal{A}_\alpha$  est totalement permanente. Il est facile de démontrer qu'il existe une matrice  $\mathcal{C}_\alpha$  qui est permanente telle que  $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha \mathcal{A}_1$ . Il en découle que toute suite  $\mathcal{A}_1$ -sommable

est aussi  $a_\alpha$ -sommable pour un  $\alpha$  positif quelconque.

Donnons une autre définition : soit  $\mathcal{B} = (b_{nj})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n \geq 1}}$  une matrice triangulaire permanente qui jouit de la propriété suivante :

Soit  $b_{nj} \neq 0, 1 \leq j \leq n, n \geq 1$  et soit  $0 < \frac{b_{nj}}{b_{n'j}} \leq c_6, 1 \leq j \leq n' \leq n$ . Pour toute

suite réelle  $\{s_N\}$ , pour tout  $m$  et tout  $n$  avec  $m \leq n$ , il existe un  $m'$  tel que

$$\left| \sum_{N=1}^m b_{nN} s_N \right| \leq \frac{b_{n1}}{b_{m'1}} \left| \sum_{N=1}^{m'} b_{m'N} s_N \right|, \quad 1 \leq m' \leq m \leq n.$$

Si cette propriété est satisfaite, on dit que  $\mathcal{B}$  obéit à un théorème de moyenne. Il est facile de voir qu'une telle matrice  $\mathcal{B}$  jouit de la propriété suivante : soit  $t = \mathcal{B}s$  et  $t_n = o(1)$  (resp.  $O(1)$ ).

Alors  $s_n = o\left(\frac{1}{b_{nn}}\right)$  (resp.  $O\left(\frac{1}{b_{nn}}\right)$ ).

Lemme 1.1

La matrice  $\hat{a}_1$  et par conséquent toutes les matrices  $\hat{a}_\alpha$  obéissent à un théorème de moyenne. Donc, si  $t = \hat{a}_\alpha s$  et  $t_n = O(1)$  alors  $s_n = O\left(\frac{1}{a_n}\right)$ .

II - Théorème 2.1

Soient  $X_n, Y_n, n \geq 1$  des éléments aléatoires à valeurs en  $H$  qui satisfont à la condition (1.1), c'est à dire  $X_n$  est un processus de Robbins-Monro. Soit :

$$E(Y_n \mid X_1, \dots, X_n) = M(X_n), \quad n \geq 1, \text{ p.s.} \tag{2.1}$$

où  $M$  est une application mesurable de  $H$  dans  $H$  qui satisfait aux conditions suivantes : il existe des nombres non-négatifs  $A, B$  et un nombre positif  $K$  tels que pour tous  $x \in H$

$$\|M(x)\| \leq A\|x\| + B \tag{2.2}$$

et

$$\langle x, M(x) \rangle \geq K\|x\|^2 \tag{2.3}$$

Nous supposons que la suite positive  $\{a_n\}$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \tag{2.4}$$

$$a_n \rightarrow 0$$

Pour un  $\gamma > 0$  (2.5)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \gamma a_n + o(a_n), \quad n \geq 1 \tag{2.6}$$

Soit  $a_1$  la matrice  $\left( a_i \prod_{j=i+1}^n (1-a_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n \geq 1}}$ . Si  $E(\|X_1\|^2) < \infty$  et si  $2K - \gamma > 0$

alors la  $a_1$ -sommabilité de la suite  $\{C_n\}$  définie par (1.2) implique que

$E\|X_n\|^2 = O(a_n)$ . La  $a_1$ -sommabilité de  $\{C_n\}$  peut être remplacée par l'hypothèse

que la suite :

$$a_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ est bornée.}$$

Si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n C_n = \infty$  alors on peut toujours définir un processus de Robbins-Monro

qui satisfait à toutes les autres conditions de ce théorème tel que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} E\|X_n\|^2 = \infty$ .

Nous indiquons la démonstration simple. En utilisant la notation

$b_n = E\|X_n\|^2$  on obtient sans la moindre difficulté l'inégalité

$$a_{n+1}^{-1} b_{n+1} \leq a_n^{-1} b_n (1 - a_n(2K - \gamma) + o(a_n)) + a_n (2B^2 + o(1) + C_n + o(C_n)) \tag{2.7}$$

Si  $1 > a_n(2K - \gamma) + o(a_n)$ . On peut donc supposer que cette inégalité est correcte pour

tous les  $n \geq 1$ . Il s'ensuit que :

$$a_n^{-1} b_n \leq a_1^{-1} b_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - a_i(2K - \gamma) + o(a_i))$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} a_i (2B^2 + o(1) + C_i + o(C_i)) \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 - a_j(2K - \gamma) + o(a_j)) \tag{2.8}$$

Par conséquent si  $\{C_n\}$  est  $\mathcal{A}_1$ -sommable ou si  $\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$  est au moins bornée il s'ensuit que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a^{-1} b_n < \infty$ .

D'autre part on peut construire sans la moindre difficulté un processus de Robins-Monro qui satisfait aux conditions (2.1) - (2.6) tel que le signe d'égalité apparaisse toujours dans (2.7). Alors la suite  $a_n^{-1} b_n$  est essentiellement la  $\mathcal{A}_1$ -transformée de la suite  $\{C_n\}$ . Si donc  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_n a_n = \infty$  alors la suite  $\{a_n^{-1} b_n\}$  ne peut pas être bornée (Voir lemme 1.1).

La relation  $E(\|X_n\|^2) = O(a_n)$  implique  $P(\|X_n\| \geq \epsilon) = O(\frac{a_n^2}{\epsilon^2})$  ou encore

$$P(\|X_n\| \geq \epsilon) = O(\frac{a_n^{1/2}}{\epsilon}) \quad (2.9)$$

Soit  $Z_n = Y_n - M(X_n)$ . La condition nécessaire pour la  $\mathcal{A}_1$ -sommabilité de la suite  $\{C_n\}$  s'écrit sous la forme  $E(\|Z_n\|^2) = O(a_n^{-1})$ . Cette relation est naturellement remplie si :

$$\|Z_n a_n^{1/2}\| \leq c_7, \text{ p.s.} \quad (2.10)$$

Nous allons remplacer (2.10) par une condition plus forte à savoir  $\|Z_n\| = \epsilon_n a_n, n \geq 1$  où  $\{\epsilon_n\}$  est une suite positive qui converge vers zéro. Nous trouverons que sous cette condition on obtient des résultats meilleurs que dans (2.9) en utilisant la méthode de Revesz mais seulement dans le cas où les  $\epsilon_n$  sont "assez petits".

III - D'abord on montre le

Lemme 3.1

Soit  $\{a_n\}$  une suite positive qui satisfait les conditions (2.4) et (2.5). On peut donc supposer que  $a_n < 1, n \geq 1$ . Soit  $\psi$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty \quad (3.1)$$

et telle que pour  $n \geq 1$

$$k = \sum_{\Psi(n)}^n a_k^{1/2} \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \leq c_8 \quad (3.2)$$

Si  $\{a_n\}$  vérifie de plus la condition (2.6) pour un  $\gamma < 1$  alors on peut choisir

$$\Psi(n) = \left[ a_n^{-1/2} \right], \quad n \geq 1 \quad (3.3)$$

La démonstration découle immédiatement du fait que sous l'hypothèse (2.6) la suite  $\left\{ a_k^{1/2} \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \right\}_{1 \leq k \leq n}$  est non-décroissante au moins pour tous les  $n$  suffisamment grands si  $\gamma < 1$ .

### Lemme 3.2

Soit  $\delta > 0$  un réel arbitraire. On suppose que  $\{a_n\}$  est une suite positive satisfaisant aux conditions (2.4) et (2.5). Soit  $\{\eta_n\}$  une suite des variables aléatoires réelles qui vérifient les hypothèses suivantes :

$$E(\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_k}) = 0, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad k \geq 1 \quad (3.4)$$

$$|\eta_n| \leq \varepsilon_n a_n^{-1/2}, \quad n \geq 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.5)$$

où  $\{\varepsilon_n\}$  est une suite positive qui converge vers zéro. Soit  $\Psi$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie dans le lemme 3.1. Soit  $\{\tau_n\}$  une suite positive vérifiant les hypothèses :

$$\tau_n \max_{\Psi(n) < k \leq n} \varepsilon_k^2 = o(1) \quad (3.6)$$

et

$$\tau_n \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Alors on a pour  $1 \leq l \leq n$

$$P\left( \sum_{k=1}^n \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \geq \delta \right) \leq \exp(-\tau_n \delta/2) \quad (3.8)$$

si  $n$  est suffisamment grand.

Démonstration :

(3.2) et (3.5) impliquent l'existence d'un entier  $m(\delta)$  tel que

$$\sum_{k=m(\delta)}^{\Psi(n)} |\eta_k| a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \leq \delta/8, \text{ p.s. pour tous les } n \text{ avec } \Psi(n) \geq m(\delta).$$

Il s'ensuit de (2.4), (2.5) et (3.5) que  $\sum_{k=1}^{m(\delta)-1} |\eta_k| a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \leq \delta/8, \text{ p.s.}$

si  $n$  est suffisamment grand. Il suffit donc de montrer que pour  $1 \geq \Psi(n)$

$$P\left\{ \sum_{1 < k \leq n} \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \geq 3\delta/4 \right\} \leq \exp(-\tau_n \delta/2). \text{ Désignons}$$

$$\left\{ \sum_{1 < k \leq n} \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \geq 3\delta/4 \right\} \text{ par } M_{n,\delta}. \text{ Alors suivant la méthode de}$$

$$\text{Revesz on obtient : } P(M_{n,\delta}) = P\left\{ \exp\left(\tau_n \sum_{1 < k \leq n} \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right) \geq \exp\left(\frac{3\tau_n \delta}{4}\right) \right\}$$

$$\leq \exp\left(-\frac{3\tau_n \delta}{4}\right) E\left(\exp\left(\tau_n \sum_{1 < k \leq n} \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)\right). \text{ En supposant que}$$

$$\max_{\Psi(n) < k \leq n} a_k^{1/2} \leq \max_{\Psi(n) < k \leq n} \varepsilon_k \text{ pour } n \text{ suffisamment grand (ou en redéfinissant}$$

la suite  $\{\tau_n\}$  d'une manière appropriée sans violer (3.6) et (3.7)) on peut sup-

poser que :

$$\tau_n |\eta_k| a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) \leq 1 \text{ pour } \Psi(n) < k \leq n.$$

On trouve donc que :

$$P(M_{n,\delta}) \leq \exp\left(-\frac{3\tau_n \delta}{4}\right) E\left(\prod_{1 < k \leq n} \left(1 + \tau_n \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) + \tau_n^2 \eta_k^2 a_k \left(\prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)^2\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{3\tau_n \delta}{4}\right) E\left(\prod_{1 < k \leq n} \left(1 + \tau_n \eta_k a_k \prod_{j=k+1}^n (1-a_j) + \tau_n^2 \varepsilon_k^2 \left(\prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)^2\right)\right)$$



En tenant compte de (3.5). Utilisant les relations (3.4) on a finalement

$$P(M_{n,\delta}) \leq \exp\left(-\frac{3\tau_n \delta}{4}\right) \exp\left(\tau_n^2 \sum_{\Psi(n) < k \leq n} \epsilon_k^2 a_k \left(\prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)^2\right).$$

$a_1$  étant une matrice permanente on obtient que  $\sum_{\Psi(n) < k \leq n} a_k \left(\prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)^2 \leq c_9$ ,

$n \geq 1$ . Par conséquent on a :

$$\tau_n \sum_{\Psi(n) < k \leq n} \epsilon_k^2 a_k \left(\prod_{j=k+1}^n (1-a_j)\right)^2 \leq \delta/4$$

pour  $n$  suffisamment grand en tenant compte de (3.6). L'inégalité (3.8) est donc démontrée.

Le lemme 3.2 permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1

Soit  $\{X_n\}$  un processus de Robbins-Monro donné par (1.1). Supposons que les conditions (2.1) - (2.5) soient satisfaites. De plus supposons que :

$$\|Z_n\| = \epsilon_n a_n^{-1/2}, \quad n \geq 1, \text{ p.s.} \tag{3.9}$$

où  $\{\epsilon_n\}$  est une suite positive qui converge vers zéro. Soit  $\{\tau_n\}$  définie par (3.6) et (3.7). Soit de plus  $\log n = o(\tau_n)$  (3.10)

Pour simplifier nous supposons que  $\max_{\Psi(n) < k \leq n} a_k^{1/2} \leq \max_{\Psi(n) < k \leq n} \epsilon_k$  pour tous les

$n$  suffisamment grands.

Alors si  $\|X_1\|$  est bornée p.s., on a pour tout  $\epsilon > 0$

$$P(\|X_n\| \geq \epsilon) \leq n \exp(-\tau_n K_1 \epsilon/8) \tag{3.11}$$

pour tout  $K_1$  satisfaisant à  $0 < K_1 < K$  si  $n$  est suffisamment grand. Donc

$$P(\|X_n\| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

Démonstration :

Soit  $\epsilon > 0$  et  $\delta = \epsilon/2$ . Il est facile de voir que pour tout  $K_1$  satisfaisant à  $0 < K_1 < K$  et pour tous les  $n$  suffisamment grands les inégalités suivantes sont vraies si  $\|X_n\| \geq \delta$ :

$$||X_{n+1}|| \leq ||X_n|| (1 - a_n K_1) + o\left(\frac{a_n}{\delta}\right) - a_n \frac{\langle X_n, Z_n \rangle}{||X_n||} \quad (3.12)$$

Sans restriction de généralité on peut supposer que (3.12) est remplie pour  $n \geq 1$  et que l'on a toujours  $1 - a_n K_1 > 0$ .

Définissons pour  $0 \leq l \leq n-1$

$$M_l = \{ ||X_1|| < \delta, ||X_{l+1}|| \geq \delta, \dots, ||X_{n-1}|| \geq \delta, ||X_n|| \geq \delta \}.$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$P(||X_n|| \geq \epsilon) = \sum_{l=0}^{n-1} P(M_l) \quad (3.13)$$

Si  $||X_{l+1}|| \geq \delta, \dots, ||X_{n-1}|| \geq \delta$  sont remplies, alors (3.12) implique pour

$0 \leq l < n$  les inégalités

$$||X_n|| \leq ||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) + \frac{1}{\epsilon} \left( \sum_{k=l+1}^{n-1} o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) \right) - \sum_{h=l+1}^{n-1} a_h \frac{\langle X_h, Z_h \rangle}{||X_h||} \prod_{j=h+1}^{n-1} (1 - a_j K_1)$$

Il en découle que :

$$P(M_l) \leq P\left\{ - \sum_{k=l+1}^{n-1} a_k \frac{\langle X_k, Z_k \rangle}{||X_k||} \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) \geq - ||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) - \frac{1}{\epsilon} \left( \sum_{k=l+1}^{n-1} o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) + ||X_n|| \right) \right\} \quad (3.14)$$

$\theta_{K_1}$  étant une matrice permanente on trouve que  $\frac{1}{\epsilon} \sum_{k=l+1}^n o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) \rightarrow 0$

pour  $n \rightarrow \infty$  uniformément en  $l$ . De plus  $||X_1|| < \delta$  implique

$$||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1 - a_j K_1) \leq 3 \delta / 2 \text{ uniformément pour } 1 \leq l < n \text{ si } n \text{ est suffisamment}$$

grand.

On a aussi  $\|X_1\| \prod_{j=1}^{n-1} (1-a_j K_1) \leq \frac{3\delta}{2}$  pour  $n$  suffisamment grand.

Définissons  $\eta_k = - \frac{\langle X_k, Z_k \rangle}{\|X_k\|} \cdot \mathbb{1}_{\{\|X_k\| > 0\}}$ . Il s'ensuit de (2.1) que

$E(Z_n \mid X_1, \dots, X_n) = 0$  et par conséquent que  $E(\eta_n \mid X_1, \dots, X_n) = 0$ . De plus

$\eta_i, 1 \leq i \leq n-1$  est mesurable par rapport à la tribu engendrée par  $X_1, \dots, X_n, n \geq 2$ .

Il en découle que les  $\eta_n$  vérifient l'hypothèse (3.4). De plus  $|\eta_k| \leq \epsilon_k a_k^{-1/2}, k > 1$

. Il s'ensuit donc de (3.14) que

$$P(M_1) \leq P\left(\sum_{k=1}^{n-1} K_1 a_k \eta_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1) \geq 2^{-1} \delta K_1\right) \text{ pour } 0 \leq l < n \text{ si}$$

$n$  est suffisamment grand. En utilisant la relation (3.13) et en appliquant le lemme 3.2 on obtient l'assertion (3.11). En tenant compte de (3.10) on obtient

$$P(\|X_n\| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

IV - On voit donc que la méthode de Revesz donne des résultats qui sont moins bons que ceux obtenus dans II. si  $\tau_n$  est "trop petit", c'est à dire si les  $\epsilon_n$  sont "trop grands". C'est aussi vrai pour le cas  $a_n = 1/n$  qui a été étudié en détail dans les travaux [3] et [4] sous la condition  $\epsilon_n = n^{-B}, 0 < B < 1/2$ . Mais si on choisit par exemple  $\epsilon_n = (\log \log n)^{-1}$  on n'obtient pas  $P(\|X_n\| \geq \epsilon) = O(n^{-1/2})$  comme dans (2.9).

Mais si les  $\epsilon_n$  sont "assez petits" on obtient des résultats beaucoup plus forts avec la méthode de Revesz. Considérons par exemple le cas où  $a_n = n^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1$  et  $\epsilon_n = n^{-\alpha'}, 0 < \alpha' < \alpha/2, n \geq 1$ . Cette suite  $\{a_n\}$  vérifie les hypothèses (2.4)

(2.6) avec  $\gamma = 0$ . On peut donc choisir  $\psi(n) = \lfloor n^{\alpha/2} \rfloor$  et par conséquent

$\max_{\psi(n) < k \leq n} \epsilon_n = n^{-\alpha'/2}$ . Il en découle que  $\tau_n = o(n^{\alpha'})$  satisfait aux conditions

(3.6) et (3.7). Par conséquent  $P(\|X_n\| \geq \epsilon) \leq \exp(-b(\epsilon)n^d)$  pour  $b(\epsilon) > 0$  et un

$d$  positif quelconque  $< \alpha'$  ■

B I B L I O G R A P H I E

[1] GLADYSEV<sup>V</sup> E.G.

On stochastic approximation  
Théor. Prob. Appl. 10 (1965) pp. 275-278.

[2] SCHMETTERER L.

L'approximation stochastique  
Université de Clermont-Ferrand, cours de D.E.A. A.E.A. de mathématiques  
appliquées (1969).

[3] REVESZ P.

Robbins-Monro procedure in a Hilbert space and its application in the  
theory of learning processes I.,  
Studia Sc. Math. Hung. 8 (1973) pp. 391-398.

[4] REVESZ P.

Robbins-Monro Procedure in a Hilbert space II  
Studia Sc. Math. Hung. 8 (1973) pp. 469-472.