ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

GÉRARD LETAC

# Barycentres de matrices idempotentes stochastiques

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 51-61

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_51_0>

# BARYCENTRES DE MATRICES IDEMPOTENTES STOCHASTIQUES

Gérard LETAC, Université Paul-Sabatier, Toulouse

Sommaire : Si $\Gamma$ est dénombrable et totalement ordonné, soient $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ des matrices stochastiques sur un ensemble dénombrable E telles que $P_\gamma P_{\gamma'} = P_\gamma$ quand $\gamma' \lesssim \gamma$ ; soient $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ des nombres positifs tels que $\sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = 1$. Cette note donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que la chaîne de Markov sur E gouvernée par $\sum_\gamma p_\gamma P_\gamma$ soit récurrente-positive, récurrente nulle ou transiente.

## 1 - Introduction.

Soit $G_n$ le groupe de permutations $\sigma$ de $\{1, 2, 3, \ldots\}$ telles que $\sigma(k) = k$ pour tout $k > n$. On pose $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, et on définit sur G la mesure de probabilité $\mu_n$ par

$$\mu_n (\{\sigma\}) = \frac{1}{n!} \mathbb{1}_{G_n} (\sigma)$$

Considérons alors une suite $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, et la mesure de probabilité $\mu$ sur G définie par :

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$$

Nous voudrions savoir, en termes des $p_n$, quand la promenade aléatoire sur G gouvernée par $\mu$ est récurrente ou transiente. En d'autres termes, nous considérons sur G des variables aléatoires $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ indépendantes et de même loi $\mu$, et la chaîne de Markov $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ à valeurs dans G définie par $\xi_0$ = identité et $\xi_{n+1} = \sigma_{n+1} \xi_n$. Notre problème est de décider si cette chaîne (irréductible et apériodique) est transiente ou non (elle ne peut être récurrente positive, car il s'agit d'une promenade aléatoire apériodique sur un groupe infini). Nous verrons que la condition nécessaire et suffisante de transience est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\ (p_{n+1} + p_{n+2} + \dots)} < \infty$$

La méthode de démonstration pourrait s'adapter sans difficulté au cadre suivant : prenons une suite croissante de groupes finis $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ avec leurs mesures de Haar $\mu_n$ et étudions la transience de la mesure $\mu = \sum_n p_n \mu_n$ sur $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Cependant, avec un peu plus de travail, nous allons sauter des promenades aléatoires aux chaînes de Markov.

D'abord, nous fixons un ensemble $\Gamma$ totalement ordonné et dénombrable (les entiers positifs dans notre exemple initial) qu'on peut, si on veut, identifier à une partie dénombrable des réels. Une fonction sur $\Gamma$ sera appelée une suite.

Ensuite, nous considérons une suite $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de matrices stochastiques sur un même espace d'états E, fini ou dénombrable. On pose :

$$P_\gamma = (p_\gamma(i, j))_{i,j \in E}$$

Rappelons que "$P_\gamma$ est une matrice stochastique" signifie que $p_\gamma(i, j) \geq 0$ pour tous i et j et que $\sum_{j \in E} p_\gamma(i, j) = 1$ pour tout i.

On fait enfin l'hypothèse fondamentale : $P_\gamma P_{\gamma'} = P_\gamma$ pour tous $(\gamma, \gamma')$ dans $\Gamma^2$ tels que $\gamma' \leq \gamma$.

Notons en passant que cela généralise le fait que $\mu_m * \mu_n = \mu_n$ quand $m \leq n$ dans notre exemple initial ($*$ est la convolution des mesures).

Considérons aussi une suite de nombres $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ tels que $p_\gamma > 0$ pour tout $\gamma$ de $\Gamma$ et que $\sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = 1$, ainsi que la matrice stochastique sur E définie par

$$P = \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma P_\gamma$$

(la convergence de cette série est la convergence simple sur E x E).

Le but de cette note est de classer les états d'une chaîne de Markov sur E ayant P pour matrice de transition en états récurrents-positifs, récurrents-nuls ou transients. Chemin faisant, nous calculerons explicitement la fonction de Green en cas de transience. Mais auparavant, nous devons caractériser les suites $(P_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ satisfaisant à l'hypothèse fondamentale.

## 2) Caractérisation des suites $(P_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Adoptons les notations suivantes : si $\mathcal{Q}$ est une partition de E, on note $\mathcal{Q}(i)$ l'élément de $\mathcal{Q}$ (qui est une partie de E) qui contient le point i de E. On note $i \sim j \mod \mathcal{Q}$ si $\mathcal{Q}(i) = \mathcal{Q}(j)$. Enfin, si $(\mathcal{Q}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une suite de partitions de E telle que $\gamma \geq \gamma'$ entraîne que $\mathcal{Q}_\gamma$ est plus grossière que $\mathcal{Q}_{\gamma'}$, alors la suite de parties de E $(\mathcal{Q}_\gamma(i))_{\gamma\in\Gamma}$ est croissante. La famille des parties de E de la forme $\mathcal{Q}(i) = \bigcup_\gamma \mathcal{Q}_\gamma(i)$ consitue alors une partition de E qu'on notera $\mathcal{Q} = \bigwedge_\gamma \mathcal{Q}_\gamma$.

Théorème 1 : Soit $(P_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une suite de matrices stochastiques sur E telle que $P_\gamma P_{\gamma'} = P_\gamma$ pour tous $\gamma$ et $\gamma'$ tels que $\gamma \geq \gamma'$. Alors il existe

i) Une suite $(\mathcal{Q}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de partitions de E telle que $\gamma \geq \gamma'$ entraîne que $\mathcal{Q}_\gamma$ est plus grossière que $\mathcal{Q}_{\gamma'}$ ,

ii) Des nombres strictement positifs $\pi(i)$, avec $i \in E$ tels que

$$\pi(\mathcal{Q}_\gamma(i)) = \sum_{k\in\mathcal{Q}_\gamma(i)} \pi(k) < \infty \text{ et que}$$

$$p_\gamma(i, j) = \pi(i) / \pi(\mathcal{Q}_\gamma(i)) \quad \text{si } i \sim j \mod \mathcal{Q}_\gamma ,$$

$$p_\gamma(i, j) = 0 \qquad \text{sinon}$$

De plus, les $\mathcal{Q}_\gamma$ sont uniques et $(\pi(i))_{i\in E}$ est unique à une constante multiplicative près sur chaque composante de $\bigwedge_\gamma \mathcal{Q}_\gamma$.

Démonstration

Puisque $P_\gamma = P_\gamma^2$ pour tout $\gamma$ , on peut écrire :

$$P_\gamma = \lim_k P_\gamma^k .$$

Si on considère sur E une chaîne de Markov ayant pour matrice de transition $P_\gamma$ (appelons-la la chaîne $\gamma$), on déduit de la première égalité que chaque état est apériodique (mais la chaîne $\gamma$ n'est pas nécessairement irréductible), et on déduit de la deuxième que chaque état est récurrent-positif (on utilise ici la théorie classique des chaînes, telle qu'elle est exposée dans le livre de W. Feller [1]). Désignons par $\Omega_\gamma$ l'ensemble des classes de la chaîne $\gamma$. De la deuxième inégalité, de nouveau, on déduit qu'il existe pour chaque élément A de $\Omega_\gamma$ une suite $(\pi_\gamma^{(A)}(i))_{i\in E}$ telle que :

$$p_\gamma(i, j) = \pi_\gamma^{(A)}(i) \quad \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont dans } A,$$

avec : $\pi_\gamma^{(A)}(i) = 0$ si $i \notin A$

et $\sum_{i\in A} \pi_\gamma^{(A)}(i) = 1.$

Naturellement $p_\gamma(i, j) = 0$ si $i \not\sim j \mod \Omega_\gamma$.

Utilisons maintenant $P_\gamma P_{\gamma'} = P_\gamma$ si $\gamma' \lesssim \gamma$.

Cela s'écrit encore :

$$\sum_k p_\gamma(i, k) \; p_{\gamma'}(k, j) = p_\gamma(i, j)$$

De cette dernière égalité, on déduit que toute classe B de $\Omega_{\gamma'}$ est contenue dans quelque classe A de $\Omega_\gamma$ et que si $j \in B \subset A$ :

$$\pi_{\gamma'}^{(B)}(j) \sum_{k\in B} \pi_\gamma^{(A)}(k) = \pi_\gamma^{(A)}(j)$$

Supposons que B = A et que $\gamma' < \gamma$. Comme $\sum_{k\in A} \pi_\gamma^{(A)}(k) = 1$, on a donc $\pi_\gamma^{(A)}(j) = \pi_{\gamma'}^{(A)}(j)$ pour tout j. Ceci montre que $\pi_\gamma^{(A)}$ ne dépend que de A, non de $\gamma$.

Soit maintenant A une composante de la partition $\Omega = \bigwedge_\gamma \Omega_\gamma$ , et fixons $i_0$ dans A. Si $i \in A$, il existe un $\gamma_i$ tel que $i_0 \sim i \mod \Omega_\gamma$ si $\gamma \geqslant \gamma_i$.

Par conséquent si $\gamma \geqslant \gamma_i$ le rapport

$$\frac{p_\gamma(i,i)}{p_\gamma(i_o,i_o)} = \frac{p_{\gamma_i}(i,i)}{p_{\gamma_i}(i,i_o)}$$

ne dépend pas de $\gamma$ mais seulement de i et de $i_o$. On le note $_{i_o}\pi(i)$, et c'est défini pour i dans A. On procède de même pour chaque composante de $\mathcal{A}$ et on pose $\pi(i) = {}_{i_o}\pi(i)$. Il est clair que $\pi$ a la propriété indiquée dans l'énoncé. L'unicité des $\mathcal{A}_\gamma$ va de soi puisque les propriétés annoncées de $\mathcal{A}_\gamma$ entraîne que $\mathcal{A}_\gamma$ ne peut être que la partition en classes de la chaîne $\gamma$. Quant à l'unicité de $\pi$ elle s'étudie de la manière suivante :

Soit A une classe de $\mathcal{A}$. Si A n'a qu'un point l'énoncé est trivial. Si A a au moins 2 points i et j il existe $\gamma$ tel que $i \sim j \bmod \mathcal{A}_\gamma$. Alors supposons que deux suites $(\pi(k))_{k \in E}$ et $(\pi'(k))_{k \in E}$ conviennent. On aurait, en posant :

$$s = \sum_{k \in \mathcal{A}_\gamma(i)} \pi(k) \text{ et } s' = \sum_{k \in \mathcal{A}_\gamma(i)} \pi'(k)$$

$\dfrac{\pi'_i}{s'} = \dfrac{\pi_i}{s}$ $\quad \dfrac{\pi'_j}{s'} = \dfrac{\pi_j}{s}$ et donc $\dfrac{\pi'_i}{\pi_j} = \dfrac{\pi'_j}{\pi_j}$, ce qui montre que $\pi$ et $\pi'$ sont proportionnelles sur A, et achève la démonstration.

<u>Corollaire 1</u> : Si la suite $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ satisfait à l'hypothèse fondamentale, alors :

$$P_{\gamma'} \cdot P_\gamma = P_\gamma \text{ pour tous } (\gamma,\gamma') \text{ de } \Gamma^2 \text{ tels que } \gamma' \leqslant \gamma.$$

<u>Corollaire 2</u> : Si la suite $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ satisfait à l'hypothèse fondamentale, alors la suite $(p_\gamma(i,i))_{\gamma \in \Gamma}$ est décroissante.

<u>Remarque</u> : Dans l'exemple de l'introduction, on a $\Gamma = \mathbb{N}$, et ce qui joue le rôle de $\mathcal{A}_n$ est formé des translatés dans G du groupe $G_n$.

<u>3) Mesures stationnaires et récurrence positive.</u>

A partir de maintenant nous considérons que la suite $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ satisfait à l'hypothèse fondamentale et nous nous donnons une suite $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de nombres $> 0$ tels que $\sum_\gamma p_\gamma = 1$. On pose

$$P = \sum_\gamma p_\gamma P_\gamma$$

(convergence simple sur E x E) et nous considérons une chaîne de Markov, appelée chaîne C, ayant E pour ensemble d'états et P pour matrice de transition. Compte tenu du théorème 1, il est évident que l'ensemble des classes de la chaîne C est $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_\gamma$ et que chaque classe est apériodique.

Si $\Gamma$ n'a pas de plus grand élément, le symbole $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}$ est clair

Théorème 2 : $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ définie au théorème 1 est une mesure stationnaire de la chaîne C. La classe A est récurrente-positive si et seulement si $\sum\limits_{i \in A} \pi(i) < \infty$.

Démonstration :

$$\sum_{j \in E} \pi(i)\ p(i,j) = \sum_\gamma p_\gamma \sum_{i \in \mathcal{A}_\gamma(j)} \pi(i)\ p_\gamma\ (j,j).$$

Remarquons que $\sum\limits_{i\in\mathcal{A}_\gamma(j)} \pi(i)\ p_\gamma(j,j) = \pi(j)$

d'après le théorème 1. On a donc montré que $\pi$ est une mesure stationnaire : le reste est immédiat.

4) classification des états

Théorème 3 : L'état i est récurrent-positif si et seulement si ou bien $\Gamma$ a un plus grand élément, ou bien $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} p_\gamma\ (i,\ i) > 0$.

Si $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} p_\gamma\ (i,i) = 0$, l'état i est transient si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sum\limits_{\gamma\in\Gamma(x)} p_\gamma} < \infty\ ,$$

où $\Gamma(x) = \{\gamma\ ;\ p_\gamma(i,i) \leqslant x\}$ .

Démonstration : Désignons par $u_k$ l'entrée (i,i) de la matrice $P^k$(avec $u_0$=1), k=0,1,2,....

Introduisons un espace de probabilité auxiliaire sur lequel nous définissons des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ à valeurs dans $\Gamma$, et de même loi définie par

$$P\ [X_k = \gamma] = p_\gamma\ .$$

On pose aussi $Y_k = \max\ \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ .

Toutes les probabilités et espérances que nous écrivons maintenant sont relatives à cet espace de probabilité.

Pour simplifier, nous posons $m(\gamma) = p_\gamma(i,i)$. Par récurrence sur k, en utilisant le corollaire 1 du théorème 1, on peut écrire :

$$P^k = \sum_{\gamma\in\Gamma} \Pr\left[Y_k = \gamma\right] P_\gamma$$

et ceci implique que

$$u_k = \mathbb{E}\,(m(Y_k)).$$

Si $\Gamma$ a un plus grand élément $\gamma_0$, puisque $p_{\gamma_0} > 0$ alors presque-sûrement il existe un entier aléatoire $k_0$ tel que :

$$Y_k = \gamma_0 \quad \text{pour } k \geqslant k_0.$$

Si $\Gamma$ n'a pas de plus grand élément, puisque $p_\gamma > 0$ pour tout $\gamma$, $Y_k \xrightarrow[k\infty]{} +\infty$ presque-sûrement. Or d'après le corollaire 2 du théorème 1, la suite $(m(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ est monotone. Donc, par convergence monotone :

$$\lim_{k\infty} u_k = m(\gamma_0) \text{ si } \Gamma \text{ a un plus grand élément}$$

$$= \lim_{\gamma\to+\infty} m(\gamma) > 0 \quad \text{sinon.}$$

Puisque i est récurrent-positif si et seulement si $\lim\limits_{k\infty} u_k > 0$, la première partie est démontrée.

Supposons maintenant que $\Gamma$ n'ait pas de plus grand élément et que $\lim\limits_{\gamma} m(\gamma)=0$

Alors, puisque $m(\gamma)$ est décroissante :

$$\Pr\left[m(Y_k) > x\right] = \Pr\left[m(X_1) > x \,;\, m(X_2) > x \,;\ldots;\, m(X_k) > x\right] .$$

$$= \left[\Pr\,(m(X_1) > x)\right]^k.$$

Puisque $u_k = \mathbb{E}(m(Y_k))$, on a

$$u_k = \int_{0^+}^{\infty} \Pr\left[m(Y_k) > x\right] dx = \int_{0^+}^{1} \Pr\left[m(X_1) > x\right]^k dx$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \int_{0^+}^{1} \frac{\Pr\left[m(X_1) > x\right] dx}{\Pr\left[m(X_1) \leqslant x\right]}$$

Puisque i est transient si et seulement si $\sum\limits_{k=1} u_k < \infty$ et que la convergence de l'intégrale est équivalente à celle de

$$\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{\Pr\left[m(X_1) \leq x\right]} ,$$

la preuve est faite.

L'application du théorème 2 est particulièrement simple dans le cas où $\Gamma$ est tel que tout segment $[\gamma, \gamma']$ est fini, comme dans le cas $\Gamma = \mathbb{Z}$ ou $\Gamma = \mathbb{N}$, car la convergence de l'intégrale est celle d'une série. Par exemple, la promenade aléatoire sur les permutations de $\mathbb{N}$ décrite dans l'introduction est transiente si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(p_{n+1} + p_{n+2} + \dots)} < \infty .$$

5) Calcul de la fonction de Green

Soit $i_0 \sim i \bmod \mathcal{G}$ et supposons que la chaîne C soit transiente en $i_0$. Nous allons calculer la fonction de Green

$$G(i_0, i) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(i_0, i)$$

où $p^{(k)}(i_0, i)$ est l'entrée $(i_0, i)$ de $P^k$.

On pose $\Gamma^+(i_0, i) = \{\gamma \;;\; i_0 \sim i \bmod \mathcal{G}_\gamma\}$

et $m_0(i_0, i) = \sup_{\gamma \in \Gamma^+(i_0, i)} P_\gamma(i,i)$.

(Remarquons que $\Gamma^+(i_0, i)$ n'a pas nécessairement de plus petit élément. Il n'y a pas d'inconvénient à convenir $m_0(i_0, i)$ si $\Gamma^+(i_0, i) = \Gamma$.

Posons aussi $F_i(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma(x)} p_\gamma$ si $\Gamma_i(x) = \{\gamma \;;\; p_\gamma(i,i) \leq x\}$

Théorème 4 :

$$G(i_0, i) = \int_0^{m_0(i_0,i)} \frac{1 - F_i(x)}{F_i(x)}\,dx - m_0(i_0, i)\,\frac{1-F_i(m_0(i_0, i))}{F_i(m_0(i_0,i))}$$

Démonstration : On utilise les variables aléatoires $X_k$ et $Y_k$ de la démonstration du théorème 3. Alors

$$p^{(k)}(i_0, i) = \mathbb{E}(p_{Y_k}(i_0, i)).$$

Cependant :

$$p_Y(i_0, i) = p_Y(i,i) \quad \text{si } i \in \mathcal{G}_Y(i_0)$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

Donc :

$$p^{(k)}(i_0, i) = \mathbb{E}\,( \mathbb{1}_{Y_k \in \Gamma^+(i_0,\, i)} \quad p_{Y_k}(i,i))$$

$$= \int_0^1 \Pr\left[\mathbb{1}_{Y_k \in \Gamma^+(i_0, i)} \quad p_{Y_k}(i,i) > x\right] dx.$$

Introduisons alors la variable aléatoire $M_k = \min\limits_{1 \leq n \leq k} p_{X_n}(i,i)$.

Alors : $\{Y_k \in \Gamma^+(i_0,i)\} = \{M_k \leq m_0(i_0, i)\}$ ,

et $\{p_{Y_k}(i,i)\} = \{M_k > x\}$ .

Donc $p^{(k)}_{(i_0,\, i)} = \int_0^{m_0(i_0,i)} \Pr\left[x < M_k\right] dx - \int_0^1 \Pr\left[m_0 < M_k\right] dx$

comme $\Pr\left[x < M_k\right] = (1 - F_i(x))^k$ comme dans la preuve du théorème 3, on obtient immédiatement par sommation la formule annoncée.

En application de ce théorème 4, on pourrait montrer que si $\Gamma = \mathbb{N}$ et si les éléments de $\mathcal{G}_\gamma$ sont finis pour tout $\gamma$ (ce qui est le cas de l'exemple de l'introduction) la frontière de Martin [2] de la chaîne C correspondante ne comprend qu'un point. Il est probable que la frontière de Martin est liée aux points d'accumulation de $\Gamma$ . J'espère revenir sur ce point dans une autre publication.

## 6) Une remarque d'ordre combinatoire

Revenons à l'exemple de l'introduction de la promenade aléatoire sur les permutations de $\mathbb{N}$. Nous allons faire une remarque dans ce cas qui serait facilement généralisable à une suite croissante de groupes finis.

Si $\sigma \in G$ on pose $k(\sigma) = \sup\ \{k\ ;\ \sigma(k) \neq k\}$ , en convenant que $k(e) = 0$ où e est la permutation identique. La probabilité $\mu = \sum\limits_n p_n\ \mu_n$ sur G peut être caractérisée comme une probabilité sur G telle que $\mu(\{\sigma\})$ ne dépende que $k(\sigma)$ seul, c'est à dire que

$$\mu(\{\sigma\}) = q_{k(\sigma)} ,$$

où $q_k = \dfrac{p_k}{k!} + \dfrac{p_{k+1}}{(k+1)!} + \ldots$

Si on reprend la méthode des paragraphes 4 et 5, on obtient la fonction génératrice de la suite $\mu^{*n}(\{e\})$ (où $*$ indique la convolution dans G) :

$$\sum_{n=o}^{\infty} z^n \mu^{*^n}(\{e\}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \frac{z(p_1+\ldots+p_k)}{1-z(p_1+\ldots+p_k)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z \sum_{j=1}^{k} j\,!\,(q_j-q_{j+1})}{1 - z \sum_{j=1}^{k} j\,!\,(q_j- q_{j+1})} \qquad (*)$$

Si on introduit ensuite le semi-groupe S des mots non abéliens construits sur $\Gamma$ et l'algèbre réelle $A_S$ construite sur S, ainsi que l'algèbre F des séries formelles à coefficients réels et à une infinité de variables commutatives $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$, alors on peut considérer l'homomorphisque $h : A_S \to F$ tel que

$$h(\sigma) = Q_{k(\sigma)}$$

Soit $S_n$ l'ensemble des éléments de S de la forme $(\sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1)$ tels que $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1 = e$ (composition au sens de G). On désigne par $U_n$ la somme des éléments de $S_n$ dans l'algèbre $A_S$.

Alors le coefficient de $z^n$ dans $(*)$, en remplaçant $q_k$ par $Q_k$, donne la valeur de $h(U_n)$.

# B I B L I O G R A P H I E

[1] W. FELLER : "An introduction to probability theory and its applications"
Tome 1,3ème édition (1967) Wiley

[2] J.KEMENY J.SNELL and A. KNAPP : "Denumbrable Markov chains"
(1967), Van Nostrand,New-York.