ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. TORTRAT

Equation (1) $Ee^{\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} Y} = 1$ et mélanges de lois normales

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 47-50
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_47_0>

EQUATION (1) $E\, e^{\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} Y} = 1$ et MELANGES DE LOIS NORMALES

A. TORTRAT

Dans (1), (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles, et α un nombre au plus complexe.

Lemme 1

Si (1) est vérifiée par des α réels arbitrairement grands, des deux signes, on a $Y > 0$ (p.s.), après suppression d'un éventuel atome en (0, 0) (et normalisation, cela est loisible).

Lemme 2

$\phi_Y(z) = E\, e^{zY}$ est une fonction entière

a) si tout $\alpha = it$ vérifie (1) et Y est bornée d'un côté ;

b) si tout α réel vérifie (1) et $Y \leq T$.

$\phi_X(z)$ est entière dans le cas b), ou lorsque tout α complexe vérifie (1),

Théorème 1

On suppose $Y \leq T$. Alors il est équivalent que tout α réel, ou tout $\alpha = it$ vérifie (1), car cela signifie qu'il existe une désintégration de la loi normale $\nu = \mathcal{N}(0, T)$, centrée de variance T, en lois normales $\mathcal{N}(X, T-Y)$ (centrées en X, de variances $T - Y$) :

$$(2) \quad Y = \int_\Omega \nu_{X,Y}\, P(d\omega).$$

Alors $\overline{X} = 0$, $\overline{X^2} = \overline{Y}$ (et tout α complexe $\in$ (1)).

Tout temps d'arrêt borné τ, du mouvement brownien X_t, fournit une solution $X_\tau = X$, $\tau = Y$ de (1) ; pour α réel et le ocuple (x_τ, τ), (1) caractérise les temps d'arrêt réguliers de X_t (alors Y non borné).

ϕ_Y (z) s'annule si Y n'est pas constante, et ϕ_X si X n'est pas normale. En particulier X et Y ne peuvent être indépendants (si $Y \leqslant T$, (1) vaut pour tout α complexe si (2) est vrai).

Questions

1. Toute désintégration (2) de $\mathcal{M}$ (0, T) est-elle du type (x_τ, τ) ? Lorsque Y n'est pas bornée en est-il de même de toute solution (α réel) de (1) ?

2. Quelles sont les lois pour X, ou pour le couple (X, Y) qui ne peuvent satisfaire (1), pour $Y \leqslant T$. On sait (cf. [1]) que toute loi pour X (admettant une espérance) est réalisable par un temps d'arrêt vrai x_τ (i.e. $\{\tau \leqslant t\} \in$ la tribu engendrée par les $x_{t'}$, $t' \leqslant t$). Ces τ sont non bornés, sont-ils réguliers ? (oui au moins si ϕ_X est entière).

Théorème 2

Les solutions de (1) avec $Y \leqslant T$ excluent les lois à un nombre fini de valeurs pour X, et plus généralement les couples (X, Y) tels que Y_x désignant la variable aléatoire $(Y \mid x)$ (: Y conditionnée par x),

il existe un $b \in]0, T[$ tel que (pour un $\eta > 0$ et une suite $t_n \uparrow \infty$)

(3) $A = \{x : P(Y_x > b) > 0\}$ satisfasse

$P(A) > 0$ et (3') $\qquad \left\{\text{tous cos } t_n x \geqslant e^{-\frac{t^2}{2}\eta}, \; x \in A, \; n \geqslant 1. \right\}$

Preuve

(1) pour α = it, donne

(4) $e^{-\frac{t^2}{2} b} = E \cos tX \, e^{\frac{t^2}{2}(Y-b)} = \int_A \cos tx \; E\, e^{\frac{t^2}{2}(Y_x - b)^+}$ + un terme en $|\quad| \leqslant 1$.

Mais $E\, e^{\frac{t^2}{2}(Y_x-h)^+} \cos tx \geqslant e^{\frac{t^2}{2}(m_x^+ - \eta)}$, pour $x \in A$ et tout t_n, suivant (3), et le second membre de (4) augmenterait indéfiniment avec t_n.

Théorème 3

Si le couple (X, Y) avec $Y \leqslant T \in (1)$ (tout α réel, donc tout α complexe), la loi de X est p.s. sans atomes, au sens suivant : si a est l'abscisse d'un atome p pour X, et qu'on fixe Y_a, ainsi que tous les autres éléments de définition de la loi (X, Y), a doit appartenir à un ensemble de mesure de Jordan nulle.

On notera que s'il existe des ensembles A infinis dénombrables qui ne satisfont pas à (3') pour aucune suite $t_n \uparrow \infty$), X pourrait, à priori, être purement atomique, porté par A, donc le p.s. de cet énoncé serait indispensable (mais l'existence d'un tel A ne suffit pas pour assurer celle d'un couple (X, Y) $\in$ (1) avec X portée par A).

Preuve

Ecrivant (1), pour α = it sous la forme :

$$E\, e^{i(tX+c) + \frac{t^2}{2} Y} = e^{ic} \qquad c \in \Delta = [-\pi, \pi[,$$

et posant

$$\theta(t,x) = E\, e^{\frac{t^2}{2} Y_x} \geqslant e^{\frac{t^2}{2} m_x}, \text{ avec } m_x = E\,\{Y \mid x\},$$

on a

$$p \cos(ta+c)\, \theta(t,a) + S(t,c) = \cos c, \text{ avec}$$

$$S(t,c) = \int_{x \neq a} \cos(tx+c)\, \theta(t,x)\, P(dx).$$

Mais $0 \leqslant \theta(t,x) \leqslant e^{Tt^2/2}$ entraîne que S (t, c) est fonction continue de c, et S (t, c) = - S (t, c + π). Si c(t) désigne un zéro de S (t, .) sur Δ, on a donc

(5) $p \cos(ta + c(t))\, \theta(t, a) = \cos c(t)$, avec $\theta(a, t) \geq e^{\frac{t^2}{2} m_a}$, $m_a > 0$.

(5) impose à a d'appartenir à un ensemble d'intervalles égaux de mesure, relativement àcelle de Lebesgue, $\sim 4 / 2 \pi \theta(t, a)$ lorsque t est grand, d'où la conclusion.

|1| DUBINS L.E. On a theorem of Skorohod, Ann. of Math. Stat. (1968) 39-6 (2094-7).