ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. T. SMYTHE

Convergence de sommes de variables aléatoires indicées par des ensembles partiellement ordonnes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 43-46

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_43_0>

CONVERGENCE DE SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES INDICEES PAR DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNES

R. T. SMYTHE

0. INTRODUCTION

Les ensembles partiellement ordonnés $(\mathcal{a}, \leq)$ dont il s'agit ici satisfont toujours aux hypothèses suivantes :

(a) $\mathcal{A}$ est dénombrable

(b) $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, card $\{\beta \in \mathcal{A} \mid \beta \leq \alpha\} \equiv |\alpha| < \infty$

(c) $\forall j \in N$, card $\{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = j\} \equiv d(j) < \infty$

L'exemple le plus connu est N^r, r un entier ≥ 1, ou $\underset{\sim}{x} \equiv (x_1, x_2, \dots x_r) \leq \underset{\sim}{y} \equiv (y_1, y_2, \dots, y_r)$ si et seulement si $x_i \leq y_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.
Soit $\{X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ un ensemble de variables aléatoires, indépendantes, avec $E(X_\alpha) = 0$. On définit, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $E_\alpha = \{\beta \in \mathcal{A} / \beta \leq \alpha\}$, $S_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} X_\beta$.

1. INEGALITE DE HAJEK-RENYI

Soit $\mathcal{A} = N^r$; soit $E(X^2_{\underset{\sim}{j}}) \equiv \sigma^2_{\underset{\sim}{j}} < \infty$, $\forall \underset{\sim}{j} \in N^r$. Soit $\{b_{\underset{\sim}{j}}\}_{\underset{\sim}{j} \in N^r}$ un ensemble de constantes positives telles que $b_{\underset{\sim}{j}}$ définit une fonction de répartition (non-normalisée) sur N^r. Alors on a le théorème suivant, analogue à celui de Hajek et Renyi pour r = 1 : (1)

Théorème 1. Soit c > 0. Alors

$$P \{\sup_{\underset{\sim}{k} \leq \underset{\sim}{n}} | S_{\underset{\sim}{k}} / b_{\underset{\sim}{k}} | \geq c\} \leq 4^{2r-1} / c^2 \sum_{\underset{\sim}{j} \leq \underset{\sim}{n}} \sigma^2_{\underset{\sim}{j}} / b^2_{\underset{\sim}{j}}$$

2. UNE LOI DE GRANDS NOMBRES

L'objet d'intérêt ici est la classe d'ensembles partiellement ordonnés qui satisfont à (a), (b), (c), ainsi que

(d) $\mathcal{A}$ est filtrant à droite

(e) $\exists\ r \in N$ avec la propriété suivante : $\forall\ \beta \in \mathcal{A}$, il existe une application $\varphi_\beta : E_\beta \to N^r$ qui est univoque et qui conserve l'ordonnement.

Ces ensembles seront appelés des lattices locales. On définit, pour $x > 0$,

$$M(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \sum_{j \leqslant x} d(j) & x > 1 \end{cases}$$

à l'aide du théorème 1, on démontre

Théorème 2. Soit $\mathcal{A}$ une lattice locale, $\{X_\alpha\}$ de même loi. On suppose de plus que

(i) M varie régulièrement à ∞ avec un exposant < 2

(ii) $E(M(|X|)) < \infty$

Alors étant donné $\varepsilon > 0$,

$$P\ \{\ |S_\alpha / |\alpha| > \varepsilon \text{ finiment souvent}\} = 1.$$

Dans beaucoup de cas d'intérêt on a une réciproque de ce théorème. On dira qu'un ensemble $\mathcal{A}$ satisfaisant à (a), (b), et (c) est n-dérivable si :

Etant donné $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, $\exists\ \alpha_2, \ldots \alpha_j$ avec $j \leqslant n$, $\alpha_i \leqslant \alpha_1$ tels que :

(i) $|\alpha_i| \geqslant K(\alpha_1)$, ou $K(\alpha) \uparrow \infty$ lorsque $|\alpha| \uparrow \infty$;

(ii) $\left[\left\{\left[(E_{\alpha_1} \cap E^c_{\alpha_2})\quad E_{\alpha_3}\right] \cap E^c_{\alpha_4}\right\} \ldots\right] \cap E^c_{\alpha_j} = \{\alpha_1\}$

(Par exemple, N^r est 2^r-dérivable pour tout $r \in N$.) Alors le lemme de Borel-Cantelli donne

Théorème 3. On suppose que $\{X_\alpha\}$ sont de même loi, $\mathcal{A}$ est n-dérivable pour quelque n ; alors :

$$E\ (M\ (|X|)) = \infty \text{ implique } P\ \{|S_\alpha\ /\ |\alpha|| \geq 1/n \text{ infiniment souvent}\} = 1$$

3. UN THEOREME DU TYPE HSU-ROBBINS

Le théorème suivant généralise celui de Hsu et Robbins (voir (2)) :

Théorème 4. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble partiellement ordonné qui satisfait à (a), (b), et (c). Si M (x) varie régulièrement à ∞ , alors

$$E\ (|X|\ \ M\ (|X|)) < \infty \quad \text{implique} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} P\ \{|S_\alpha| > |\alpha|\} < \infty$$

4. LA LOI DU LOGARITHME ITERE

Wichura (3) a démontré le théorème suivant, analogue à la loi du logarithme itéré classique :

Théorème 5. Soit $\mathcal{A} = N^r$, $r > 1$. Alors si $\{X_\alpha\}$ sont de même loi, avec $E\ ((X^2\ \mathrm{Log}^{r-1}\ |X|)\ /\ \mathrm{LogLog}\ |X|) < \infty$, on a

$$P\ \{\limsup_{\min j_i \to \infty}\ |S_{\underset{\sim}{j}}|\ /\ (\mathrm{var}\ (X)\ |\underset{\sim}{j}|\ \ \mathrm{Log\ Log}\ |\underset{\sim}{j}|)^{1/2} = (2r)^{1/2}\} = 1$$

Il démontre de plus que la condition $E\ ((X^2\ \mathrm{Log}^{r-1}\ |X|)\ /\ \mathrm{LogLog}\ |X|)$ est nécessaire pour avoir une loi du logarithme itéré.

BIBLIOGRAPHIE

(1) HAJEK, J., et RENYI, A., Generalization of an inequality of Kolmogorov, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 6, 281-283, 1955.

(2) ERDOS, P., On a theorem of Hsu and Robbins, Annals of Math. Stat. 20, 286-291, 1949.

(3) WICHURA, M., Some Strassen-type Laws of the Iterated Logarithm for Multiparameter Stochastic Processes with Independent Increments, Annals of Probability 1, 1973.