Annales scientifiques
de l'Université de Clermont-Ferrand 2
*Série Mathématiques*

Klaus Krickeberg

# L'estimation du spectre de processus de droites

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 35-42

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_35_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# L'ESTIMATION DU SPECTRE DE PROCESSUS DE DROITES

Klaus KRICKEBERG

Ayant fixé une droite orientée $x_0$ dans le plan et un point O sur $x_0$, nous décrivons une droite orientée x arbitraire dans le plan par l'angle $\theta$ entre $x_0$ et x et la distance p entre x et O, cette distance étant munie du signe positif si O se trouve "sur la rive gauche" de x et du signe négatif dans le cas contraire. Ainsi l'ensemble de toutes les droites orientées $x = (\theta, p)$ se représente comme le cylindre $X = S_1 \times R$ où $S_1$ désigne le cercle. Un processus de droites est un processus ponctuel sur X. Ses réalisations sont donc des mesures $\omega$ de Radon positives sur X à valeurs entières. Soit $\Omega$ l'espace de toutes ces réalisations $\omega$ muni de la topologie vague, $\mathcal{F}$ la tribu des sous-ensembles boréliens de $\Omega$ pour cette topologie et P la loi, définie sur $\mathcal{F}$, du processus étudié. Pour un sous-ensemble borélien borné A de X nous désignons par Z (A) la variable aléatoire $\omega \rightsquigarrow \omega(A)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nous imposons toujours deux conditions assez naturelles, de nature géométrique :

(S) P est "sage", c'est-à-dire il n'y a pas de points multiples : pour P-presque tout $\omega$, on a $\omega\{x\} \leq 1$ quelque soit $x \in X$ ; dans ce cas là, $\omega$ est complètement caractérisée par son support supp $(\omega)$.

(ND) P est non-dégénéré, c'est-à-dire pour P-presque tout $\omega$, il n'existe pas de **paires** de droites parallèles ou antiparallèles dans supp $(\omega)$.

Nous nous intéressons des processus de droites qui jouissent de certaines propriétés de stationnarité. Evidemment les tâches suivantes se présentent :

1. Une description générale de la structure de P, en particulier portant sur les relations entre ce qui se passe dans les régions diverses de X.

2. L'analyse statistique d'un processus P particulier dont on a observé une réalisation.

Nous nous bornerons à l'étude des covariances, mais il convient quand même de rappeler la définition des mesures des moments de P d'un ordre entier $k \geqslant 1$ arbitraire. Soit donc $\nu^{(k)}$ la mesure dans $X^k$ déterminée par

$$\nu^{(k)} (A_1 \times \dots \times A_k) = E\,(Z\,(A_1) \dots Z\,(A_k))$$

pour des boréliens $A_1, \dots, A_k \subseteq X$. En particulier, $\rho = \nu^{(1)}$ est la mesure d'intensité de P et $\nu^{(2)} - \rho \otimes \rho$ sa mesure des covariances. P est dit d'ordre k si $\nu^{(k)}$ est une mesure de Radon, et stationnaire d'ordre k si, en plus, $\nu^{(k)}$ est invariante pour le groupe $\mathcal{G}^{(k)}$ des applications $(x_1, \dots, x_k) \rightsquigarrow (g\,x_1, \dots, g\,x_k)$ où g parcourt le groupe $\mathcal{G}$ des transformations de X induites par les déplacements euclidiens (translations combinées avec rotations) du plan.

Nous regardons surtout le cas $k = 2$ et écrivons

$$(1) \qquad \nu^{(2)} = \mathring{\nu}^{(2)} + \check{\nu}^{(2)}$$

où $\mathring{\nu}^{(2)}$ est la partie de $\nu^{(2)}$ portée par la diagonale $D = \{(x,x) : x \in X\}$ et $\check{\nu}^{(2)}$ sa partie portée par $\check{X}^2 = X^2 - D$.

Supposons ensuite que P est stationnaire du second ordre. Alors (S) implique que $\rho$ est invariant pour $\mathcal{G}$, c'est-à-dire $d\rho = r\,d\theta\,dp$ où la constante r est appelée la densité de l'intensité de P. La condition (S) est aussi équivalente à

$$(2) \qquad \mathring{\nu}^{(2)}\,(C) = \rho\,(\pi\,(C \cap D)) \text{ pour tout ensemble borélien } C \subseteq X$$

où $\pi$ désigne la projection $(x, x) \rightsquigarrow x$ de D sur X. L'hypothèse (ND) entraîne une représentation de $\nu^{(2)}$ sous la forme

$$(3) \quad \nu^{(2)}\ (J_1 \cap M_1 \cap J_2 \cap M_2) = \lambda(M_1)\ \lambda\ (M_2) \int_{S_1} \lambda\ (J_1 \cap (J_2 - \gamma))\ K\ (d\gamma),$$

$J_1, J_2 \subseteq S_1$, $M_1, M_2 \subseteq R$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue, $J_2 - \gamma = \{\theta\text{-}\gamma : \theta \in J_2\}$ et K une mesure de Radon portée par $S_1 - \{0, \pi\}$ qui caractérise donc, avec r, la mesure $\nu^{(2)}$. La démonstration de (3) repose sur une désintégration de $\nu^{(2)}$ en mesures invariantes pour $\mathcal{G}^{(2)}$ portées par les classes d'équivalences de $X^2$ sous l'action de $\mathcal{G}^{(2)}$ ; voir [4] . Du point de vue des propriétés du second ordre, les particularités de P ne se manifestent donc que par le comportement des angles, décrit par K, tandis que les distances entre les droites et le point fixe 0 se comportent toujours comme un processus de Poisson ordinaire sur R. Intuitivement, $K\ (d\gamma) - r^2\ d\gamma$ représente la covariance entre des droites qui font entre eux l'angle $\gamma$ .

Il s'agit alors d'estimer les propriétés spectrales, c'est-à-dire les coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\gamma}\ K\ (d\gamma),\ n = 0, \pm\ 1, \pm\ 2, \ldots,$$

en n'observant que ce qui se passe dans une région bornée, par exemple dans

$$K_t = \{(\theta\ , p) : \ |p| \leqslant t\}\ , \quad t > 0.$$

Quant à l'estimation de r, l'estimateur "naïf" $(4\ \pi\ t)^{-1}\ Z\ (K_t)$ s'impose qui est évidemment sans biais. Pour sa variance on trouve à l'aide de (1) - (3) :

$$V\ ((4\ \pi\ t)^{-1}\ Z\ (K_t)) = (4\ \pi\ t)^{-1}\ r + (2\ \pi)^{-1}\ K\ (S_1) - r^2.$$

Ceci converge vers 0 pour $t \to \infty$ si et seulement si $K\ (S_1) = 2\ \pi\ r^2$ ce qui caractérise les mesures des covariances des processus de Poisson. L'estimateur naïf est donc inutilisable dans le cas général. Nous renonçons à étudier des estimateurs plus raffinés, fondés sur l'observation séparée de plusieurs parties de X, et passons au spectre.

Les raisonnements employés dans le cas des processus ponctuels sur la droite suggèrent le périodogramme

$$I_t(n) = (4\pi t)^{-2} \Big| \sum_{\substack{(\theta,p)\in \operatorname{supp} Z \\ |p| \leqslant t}} e^{in\theta} \Big|^2 = (4\pi)^{-2} \, |Z(f_{t,n})|^2$$

où

$$f_{t,n}(\theta, p) = e^{in\theta} \, 1_{\{-t,t\}}(p).$$

On déduit de (1) - (3) que

$$E\, I_t(n) = (4\pi t)^{-1} r + c_n,$$

et par conséquent $I_t(n)$ est asymptotiquement sans biais pour $c_n$ si $t \to \infty$ .

Pour calculer la variance

(4) $$V\, I_t(n) = E(I_t(n)^2) - (E\, I_t(n))^2$$

il s'agit de trouver

(5) $$E(I_t(n)^2) = (4\pi t)^{-4} \; \nu^{(4)}(f_{t,n} \otimes \bar f_{t,n} \otimes f_{t,n} \otimes \bar f_{t,n}).$$

Nous allons utiliser une généralisation de la décomposition (1) au cas d'une mesure $\nu^{(k)}$ d'ordre k quelconque. Soit $\gamma = \{J_1, \dots, J_\ell\}$ une partition de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ en composantes $J_m$ non-vides et $E_\gamma$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ tels que l'application $i \leadsto x_i$ est constante sur chaque $J_m$ et à valeurs différentes sur des ensembles $J_m$ différentes. En particulier posons $\check{X}^k = E_{\{\{1\},\dots,\{k\}\}}$. Désignons ensuite par $\pi_\gamma$ la "projection" de $E_\gamma$ sur $X^\ell$ définie par

$\pi_\gamma(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_\ell)$ ou $x_i = y_m$ si $i \in J_m$ . Alors les ensembles $E_\gamma$ forment une partition de $X^k$, donc

(6) $$\nu^{(k)} = \sum_\gamma \nu_\gamma^{(k)}$$

où $\nu_\gamma^{(k)}$ est portée par $E_\gamma$ : voir [4]. Posons en particulier $\tilde\nu^{(k)} = \nu^{(k)}_{\{\{1\},\dots,\{k\}\}}$ et remarquons que, dans le cas de la droite numérique R au lieu de X, si $\check{\nu}^{(k)}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $R^k$, celle-ci s'appelle la densité factorielle de P d'ordre k ; voir [5] (product density function). La décomposition (6) fut aussi établie dans [2] pourvu que les densités factorielles des ordres 1, ..., k existent.

La formule (2) prend alors la forme générale

$$(7) \qquad \nu_\gamma^{(k)}(C) = \check{\nu}^{(l)}(\pi_\gamma(C \cap E_\gamma)) \text{ où } \quad \ell \neq \gamma \;;$$

voir [4].

On suppose ensuite que P est stationnaire du 4e ordre. En appliquant (6) et (7) à l'expression (5) nous obtenons d'abord, pour $\ell = 1$, un terme $2rt^{-3}$, et pour $l = 2$ six termes qui ne dépendent que de K et sont de l'ordre $t^{-2}$ pour $t \to \infty$ .

Le calcul des sept termes obtenus pour $l = 3$ et du terme $(4\pi t)^{-4}\ \check{\nu}^{(4)}(f_{t,n} \otimes \bar{f}_{t,n} \otimes f_{t,n} \otimes \bar{f}_{t,n})$ qui correspond à $l = 4$ s'effectue, analoguement à (3), par une désintégration des mesures $\check{\nu}^{(3)}$ et $\check{\nu}^{(4)}$. Quant à $\check{\nu}^{(3)}$, observons qu'une classe d'équivalence dans $X^3$ pour le groupe $\mathcal{G}^{(3)}$ des applications $(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (g x_1, g x_2, g x_3)$ avec $g \in \mathcal{G}$ se décrit par deux angles $\gamma_1$ et $\gamma_2$ et le rayon a du cercle inscrit du triangle orienté constitué par un triplet quelconque $(x_1, x_2, x_3)$ de cette classe qu'on désigne alors par $Y_{\gamma_1, \gamma_2\, a}$. La mesure dans $X^3$ portée par $Y_{\gamma_1\, \gamma_2\, a}$ et invariante pour $\mathcal{G}^{(3)}$ est bien connue ; c'est essentiellement la mesure dite cinématique de Poincaré. En la désignant par $\tau_{\gamma_1\, \gamma_2\, a}$ on obtiènt une désintégration canonique sous la forme

$$\check{\nu}^{(3)} = \int_{S_1 \times S_1 \times R} \tau_{\gamma_1\, \gamma_2\, a}\, K_3(d\gamma_1\, d\gamma_2\, da)$$

où $K_3$ est une mesure de Radon positive dans $S_1 \times S_1 \times R$. De manière analogue $\check{\nu}^{(4)}$ se représente par une mesure $K_4$ dans $S_1 \times S_1 \times S_1 \times R \times R$. Il en résulte finalement une formule explicite pour la variance (5) qui permet d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes sur $K_3$ et $K_4$ pour que cette variance converge vers 0 si $t \to \infty$ . Les mêmes méthodes s'appliquent aux estimateurs des $c_n$ plus généraux que $I_t$ (n) de la forme

$$(4 \pi t)^{-2} \quad |Z (g_{t,n})|^2$$

où

$$g_{t,n} (\theta , p) = e^{in\theta} h (p/t)$$

et h est une fonction numérique mesurable bornée à support inclus dans $[-1, 1]$.

Remarquons que Brillinger, en supposant l'existence et stationnarité pour translations de toutes les $\nu^{(k)}$ et l'existence et une certaine régularité des densités des cumulants, obtient, dans [2], la distribution asymtotique des estimateurs en question dans le cas de processus ponctuels dans R. Ses raisonnements s'appliquent, sous une forme modifiée, aussi aux processus de droites. D'autre part les méthodes exposées ici se prêtent également à l'étude de l'estimation du spectre d'un processus ponctuel sur R ont on ne suppose que la stationnarité d'ordre 4, mais pas l'existence des densités des cumulants.

Du reste, notre intérêt se dirige surtout vers les traits particuliers du cas des processus de droites façonnés par la structure géométrique, c'est-à-dire la structure du groupe $\mathcal{G}$ qui opère dans X. Rappelons d'abord que, d'une part, les propriétés spectrales ne concernent que les angles, donc $S_1$ ; d'autre part c'est précisément l'autre composante, à savoir R, de X qui joue lorsqu'il s'agit de construire des estimateurs "efficients" de ce spectre. Cette intersection et les méthodes utilisées se généralisent d'ailleurs facilement au cas des hyperplans orientés de $R^n$.

Pour terminer nous allons mettre en évidence le rôle de la géométrie en rappelant rapidement quelques **résultats** concernant les processus ponctuels dans R stationnaires pour le groupe des translations, et en les comparant aux faits analogues que nous venons de décrire. Au lieu de (3) on a une désintégration

$$\nu^{(2)} (A \times B) = \int_R \lambda (A \cap (B - u)) K (du).$$

Soit $r = d\rho / d\lambda$. Pour simplifier supposons que la mesure "réduite" des covariances $K - r^2 \lambda$ est bornée ; ainsi la densité spectrale

$$c(\varphi) = \int_R e^{i\varphi x} (K - r^2 \lambda)(dx), \qquad \varphi \in R,$$

existe. L'estimateur $t^{-1} Z([0, t])$ de $r$ est sans biais avec la variance

$$\frac{r}{t} + \frac{1}{t} \int_{-t}^{t} \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)(K - r^2 \lambda)(dx)$$

qui converge vers 0 pour $t \to \infty$ contrairement à ce qui se passe, en général, dans le cas des processus de droites. D'autre part, le périodogramme

$$I_t(\varphi) = t^{-1} \left| \sum_{\substack{X \in \operatorname{supp} Z \\ 0 \leq X \leq t}} e^{i\varphi X} \right|^2 = t^{-1} \left| Z(1_{[0,1]} e^{i\varphi \cdot}) \right|^2$$

a l'espérance

$$E(I_t(\varphi)) = r + \int_{-t}^{t} e^{i\varphi x} \left(1 - \frac{|x|}{t}\right) K(dx)$$

qui converge vers $r + c(\varphi)$ pour $t \to \infty$, mais sa covariance ne converge en général pas vers 0 [3, §5.5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTLETT, M.S. : An introduction to stochastic processes. 2$^{e}$ éd. Cambridge University Press 1966.

[2] BRILLINGER, D.R. : The spectral analysis of stationary interval functions. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Vol. I, 483-513. Univ. of California Press 1971

[3] COX, D.R. et P.A. W. LEWIS : the statistical analysis of series of events. London : Methuen 1966.

[4] KRICKEBERG, K. : Moments of point processes. Lecture Notes in Mathematics 29 Springer 1973.

[5] Srinivasan, S.K. : Stochastic theory and cascade processes. New York : Elesevier 1969.