

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

L. SCHMETTERER

Plongement de lois indéfiniment divisibles

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PLONGEMENT DE LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES

L. SCHMETTERER

Université de Vienne (Autriche)

Soit G un groupe localement compact. On désigne par \mathcal{B} les Boréliens de G . Soit μ une loi indéfiniment divisible définie sur \mathcal{B} , c'est-à-dire : pour tout $n \geq 1$ existe une loi $\mu_{1/n}$ telle que $\mu_{1/n}^n = \mu$ (où multiplication désigne la convolution). Soit \mathbb{Q}_+ le monoïde de nombres rationnels positifs et soit $P(G)$ le monoïde de mesures de probabilités définies sur \mathcal{B} (avec la convolution comme opération associative). On considère des homomorphismes φ de \mathbb{Q}_+ dans $P(G)$ tels que $\varphi(1) = \mu$. L'existence d'un tel homomorphisme n'est pas triviale. Au contraire : soit F_1 le groupe libre abélien qui est engendré par les éléments $\{e, x_1, x_2, \dots\}$ où e est l'élément neutre de F_1 . En introduisant dans F_1 les relations $x_1 = x_n^n$ $n \geq 1$ on obtient un groupe G_1 . Il est facile à voir que la loi de Dirac δ_{x_1} (définie par $\delta_{x_1}(\{x_1\}) = 1$) qui est indéfiniment divisible ne peut pas être plongée dans un homomorphisme φ de \mathbb{Q}_+ dans $P(G_1)$ (satisfaisant à la condition $\varphi(1) = \delta_{x_1}$).

Par une analyse plus soignée on obtient le résultat suivant : (voir [1]) : la condition nécessaire et suffisante pour que δ_x pour un $x \in G_1$ soit indéfiniment divisible est que x appartient au groupe cyclique engendré par x_1 . Aucune loi δ_x peut être plongée dans un homomorphisme φ de \mathbb{Q}_+ dans $P(G_1)$.

Le monoïde Q_+ est un monoïde sous monogène engendré par $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots$. En considérant des autres semi-groupes sous monogènes S_+ engendrés par des éléments de la forme $1, \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_1 q_2}, \dots$ où $q_i \geq 1$ sont des nombres entiers on est conduit dans une manière tout à fait naturelle au problème qu'il est possible de plonger les mesures de Dirac $\delta_x, x \in G$ dans un homomorphisme ψ de S_+ dans $P(G_1)$ tel que $\psi(1) = \delta_x$. Dans cette direction on a obtenu dans le travail [1] le résultat suivant :

Il existe des monoïdes S_+ tels que toutes les mesures de Dirac $\delta_x, x \in G_1$ peuvent être plongées dans un homomorphisme ψ de S_+ dans $P(G_1)$ satisfaisant à $\psi(1) = \delta_x$.

Sans donner des détails, je voudrais mentionner que le plongement des lois indéfiniment divisibles définies sur les Boréliens \mathcal{B} d'un groupe G localement compact dans un homomorphisme d'un monoïde sousmonogène dans $P(G)$ a quelque intérêt en ce qui concerne la caractérisation des lois de Poisson sur \mathcal{B} (Voir [2]).

Le problème, s'il est possible de plonger toute la loi indéfiniment divisible définie sur les Boréliens \mathcal{B} d'un groupe abélien G dans un homomorphisme d'un monoïde sousmonogène S_+ convenablement choisi dans $P(G)$ n'est pas encore résolu.

En considérant la version non-commutative du groupe G_1 il est possible de montrer qu'il existe des lois indéfiniment divisibles qui ne peuvent jamais être plongées dans un tel homomorphisme [1].

Maintenant on considère un problème qui se trouve dans le cadre de cette idée que nous venons d'étudier. Soit $r \mapsto \mu_r$ un homomorphisme non injectif de Q_+ dans $P(G)$ où G est un groupe localement compact. Alors il est facile à voir qu'il existe un sous-groupe compact H de G et un nombre rationnel $r_0 > 0$ tel que $\mu_{r_0} = e_H$ où e_H est la mesure normée de Haar restreinte sur H . Il s'ensuit de plus que le support de $\mu_r, r \in Q_+$ est contenu dans

une classe conjuguée $x_r H$ de H où x_r appartient au normalisateur $n(H)$ de H . On peut conjecturer que $\mu_r = \delta_{x_r} e_H$ pour tout $r > 0$. Cette conjecture est vraie pour les groupes abéliens et pour les groupes compacts (voir [3]). En utilisant la méthode développée dans [3] on obtient le résultat suivant : soit A_r l'automorphisme de H sur H défini par $h \rightarrow x_r h x_r^{-1}$, $x_r \in n(H)$. S'il existe pour tout $r > 0$ un $y_r \in H$ tel que A_r est aussi donné par $h \rightarrow y_r h y_r^{-1}$, c'est-à-dire si A_r est un automorphisme intérieur alors la conjecture est vraie.

D'autre part M. CARNAL a construit un groupe localement compact qui montre que la conjecture n'est pas vraie en général. Cet exemple ainsi que d'autres résultats ont été traités dans le travail [4] que nous venons de citer.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. HAZOD und L. SCHMETTERER : "Über einige mit der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammenhängende Probleme der Gruppentheorie. A paraître dans le Journal f.reine und angew. Mathematik 1973.
- [2] L. SCHMETTERER : On Poisson laws and related questions. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. II, Part One, 169-185, 1971
- [3] L. SCHMETTERER : Sur les lois de Poisson des probabilités sur les structures algébriques, Paris C.N.R.S., 311-318, 1969
- [4] W. HAZOD : Über Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen.
A paraître dans Sitzungsber. d. Osterr. Akademie der Wissenschaften 1974