

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ROGER FISCHLER

Suites de bi-probabilités stables

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 43, série *Mathématiques*, n° 6 (1970), p. 159-167

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__43_6_159_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES DE BI-PROBABILITES STABLES

Par Roger FISCHLER, Université Carleton

Ottawa, Canada

"... on peut dire qu'elles' y⁴ sont bien fécondes ..." ([3], pg. 37 - 38)

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'exposer les propriétés de certaines transformations, sur le produit Cartésien d'un espace métrique par un espace de probabilité, qui sont des mesures en chaque variable et qui convergent dans un certain sens. On verra que la définition donnée est une abstraction de la définition des variables aléatoires stables donnée par Renyi [6].

Comme il arrive si souvent, nous obtenons, par suite, presque sans travail, un résultat qui n'a été obtenu antérieurement ([4], [2]) qu'avec des difficultés. Nous retrouverons aussi une généralisation d'un autre résultat dont les applications dans le domaine des théorèmes limites sont très intéressantes et même surprenantes.

1. Les Mathématiques. Voir aussi la référence à Pascal.
2. Clermont (- Ferrand).

DEFINITIONS ET REMARQUES PRELIMINAIRES

Soit (M, ρ) un espace métrique avec \mathfrak{B} sa tribu de Borel, et $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un triplet de probabilité. Nous appellerons par suite bi-probabilité une application $P(\cdot, \cdot) : \mathfrak{B} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour chaque $A \in \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{B}$ $P(\cdot, A)$ et $P(B, \cdot)$ sont des mesures sur \mathfrak{B} et \mathfrak{A} respectivement et telle que $P(M, \Omega) = 1$.

Une suite $\{P_n\}$ de bi-probabilités est appelée stable s'il existe une mesure aléatoire $\mu(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour chaque $A \in \mathfrak{A}$, $P_n(\cdot, A) \implies R(\cdot, A) = \int_A \mu(\omega, \cdot) P(d\omega)$ dans le sens de la convergence faible ; c'est-à-dire, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, on a $P_n(B, A) \rightarrow R(B, A)$ si $R[\partial(B), A] = 0$; $\partial(B)$ étant la frontière du Borélien B . $\mu(\cdot, \cdot)$ s'appelle mesure aléatoire associée (m.a.a.).

Notons les propriétés suivantes :

1. Les Boréliens de non-continuité ne dépendent pas en effet de A (parce que $0 = R(\partial B, \Omega) = R(\partial B, A) + R(\partial B, A^c) \implies R(\partial B, A) = 0$)
2. $R(\cdot, \cdot)$, définie ci-dessus, est aussi une bi-probabilité
3. Pour chaque Borélien B , $R(B, \cdot)$ est absolument continue par rapport à $P(\cdot)$

THEOREMES

Dans les résultats qui suivent il sera question de différentes "probabilités engendrées". Pour éviter, chaque fois, une nouvelle définition et une nouvelle notation nous adoptons la terminologie suivante. L'interprétation, ainsi que les ensembles de définition, dans les cas particuliers seront évidents.

Soit $\{P_\alpha (\cdot) : \alpha \in I\}$ une collection des probabilités et f une transformation; la probabilité engendrée par P_α et f est désignée par $P_\alpha^f (D) = P_\alpha (f^{-1} (D))$ pour tout D telle que cette dernière est définie.

Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant (voir p.e. [1], Th.5,1) :

THEOREME A

Si les probabilités $\{P_n\}$ tendent vers P dans le sens de la convergence faible (indiqué par $P_n \implies P$) et si $P (D_f) = 0$ ou $D_f = \{f \text{ est discontinue}\} = \emptyset$ alors $P_n^f \implies P^f$.

THEOREME 1

Si $\{P_n\}$ est une suite de bi-probabilités stables et a pour m.a.a. μ et si g est une transformation de M dans M qui est, pour presque tout [par rapport à P] ω , continue presque partout [par rapport à $\mu (\omega, \cdot)$], alors les bi-probabilités $\{P_n^g\}$ sont elles aussi stables et ont pour m.a.a. μ^g .

DEMONSTRATION

Soit A fixé. Appelons N l'ensemble négligeable [par rapport à P] mentionné dans l'hypothèse. Alors on a $R (D_g, A) = \int_A \mu (\omega, D_g) P (d\omega) = \int_{A-N} \mu (\omega, D_g) P (d\omega) = \int_{A-N} 0 P (d\omega) = 0$. Comme $P_n (\cdot, A) \implies R (\cdot, A)$ on a d'après le théorème A, $P_n^g (\cdot, A) \implies R^g (\cdot, A)$. Mais $R^g (B, A) = R (g^{-1} (B), A) = \int_A \mu (\omega, g^{-1} (B)) P (d\omega) = \int_A \mu^g (\omega, B) P (d\omega)$. C.Q.F.D.

Le prochain résultat nous dit quand on a le droit de remplacer l'évènement A , dans la définition d'une suite stable, par une suite d'évènements.

Ecrivons $E \Delta F$ pour la différence symétrique entre E et F et $Q_n^{\Delta} (\cdot)$ pour $P_n^{\Delta} (B, \cdot)$.

LEMME 2

Si $\{P_n\}$ est stable et a pour m.a.a. μ et si $F_n, F \in \mathcal{Q}$ sont tels que $Q_n^M(F_n \Delta F) \rightarrow 0$ alors $P_n(B, F_n) \rightarrow \int_F \mu(\omega, B) P(d\omega)$, si $R(\partial B, F) = 0$.

DEMONSTRATION

Soit 1_A la fonction indicatrice de A . On a :

$$\begin{aligned} |P_n(B, F_n) - P_n(B, F)| &= \left| \int_{\Omega} 1_{F_n}(\omega) Q_n^B(d\omega) - \int 1_F(\omega) Q_n^B(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |1_{F_n} - 1_F| d Q_n^B = \int_{\Omega} 1_{F_n \Delta F} d Q_n^B \\ &= Q_n^B(F_n \Delta F) \leq Q_n^M(F_n \Delta F) \rightarrow 0, \text{ C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Venons-en au cas spécial qui nous intéresse pour les applications.

DEFINITION

On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$, $X_n : \Omega \rightarrow M$, est stable et a pour m.a.a. μ si pour tout $A \in \mathcal{Q}$, $P[X_n \in B, A] \rightarrow \int_A \mu(\omega, B) P(d\omega)$, quand $R(\partial B, A) = 0$. On écrit $P_n(B, A) = P[X_n \in B, A]$ et alors $\{P_n\}$ est stable.

LEMME B

Si $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité (c'est-à-dire $P[\rho(Z_n, Z) \geq \epsilon] \rightarrow 0$, $\forall \epsilon > 0$) alors on a $P[(Z_n \in E) \Delta (Z \in E)] \rightarrow 0$ pour tout Borélien E tel que $P[Z \in \partial E] = 0$.

Voir [1] Th. 4.3 pour une démonstration.

On a immédiatement :

LEMME 3

Si $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité, si $\{X_n\}$ est stable alors, on a pour tout $E \in \mathcal{B}$; $Q_n^M (F_n \Delta F) \rightarrow 0$ où $F_n = \{Z_n \in E\}$ et $F = \{Z \in E\}$.

Un schéma éclaircirait les définitions et la démonstration suivantes.

DEFINITION

Soit \mathcal{B}^Z la tribu de Borel de $M \otimes M$. Si $D \in \mathcal{B}^Z$, et Z est une variable aléatoire de Ω dans M , la section aléatoire de D par Z est désignée par $D_{Z(\cdot)}$ et définie par $D_{Z(\omega)} = \{y : y \in M, (y, Z(\omega)) \in D\}$.

DEFINITION

La mesure aléatoire $\nu (= \nu(\mu, Z))$ définie sur $\Omega \otimes \mathcal{B}^M$ par $\nu(\omega, D) = \mu(\omega, D_{Z(\omega)})$. Pour tout $D \in \mathcal{B}^M$ et $A \in \mathcal{A}$, R_ν est définie sur $\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{A}$ par $R_\nu(D, A) = \int_A \nu(\omega, D) P(d\omega)$.

On doit vérifier que ν ainsi définie est une mesure aléatoire. On vérifie directement que pour ω fixe $\nu(\omega, \cdot)$ est une mesure. Pour D fixé écrivons $f_D(\omega) = \nu(\omega, D) = \mu(\omega, D_{Z(\omega)})$. Soit $\mathcal{E} = \{D : D \in \mathcal{B}^M \ni f_D(\cdot) \text{ est mesurable}\}$. Soit $D = E_1 \times E_2$ avec $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$. Mais dans ce cas

$$D_{Z(\omega)} = \begin{cases} E_1 & \text{si } \omega \in F^2 = \{Z \in E_2\} \\ \emptyset & \text{si } \omega \notin F^2 \end{cases} \text{ où } \emptyset \text{ est l'ensemble vide. Ainsi}$$

$f_D(\omega)$ ne prend que les valeurs $\mu(\omega, E_1)$ et 0 et donc f_D est mesurable.

Le cas où D est la somme de pavés disjoints suit directement. Supposons maintenant que $\{D_n\}$ est une suite monotone d'éléments de \mathcal{E} et $D = \lim D_n$.

Pour ω fixé $(D_n)_{Z(\omega)}$ est aussi monotone et donc $f_D(\omega) = \mu(\omega, (\lim D_n)_{Z(\omega)})$

$= \mu(\omega, \lim [(D_n)_{Z(\omega)}]) = \lim \mu(\omega, (D_n)_{Z(\omega)}) = \lim f_{D_n}(\omega)$. Par hypothèse f_{D_n} est mesurable ainsi $D \in \mathcal{E}$. \mathcal{E} étant une classe monotone qui contient

l'algèbre de pavés on a que $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}^2$.

LEMME 4

Soit M séparable. Si $\{X_n\}$ est stable et a pour m.a.a. μ et si $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité, alors les bi-probabilités $\{T_n\}$, définies sur $\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{A}$ par $T_n(D, A) = P((X_n, Z_n) \in D, A)$, sont aussi stables et ont pour m.a.a. ν , définie ci-dessus.

DEMONSTRATION

Il faut démontrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $D \in \mathcal{B}^c$ avec $R_\nu(\partial D, A) = 0$ on a $T_n(D, A) \rightarrow R_\nu(D, A)$.

Supposons d'abord que $D = E_1 \times E_2$. La valeur de $D_{Z(\omega)}$ dans ce cas a été écrite en haut. Ainsi on a $T_n(D, A) = P(X_n \in E_1, Z_n \in E_2, A) = P_n(E_1, F_n^c \cap A)$ où nous écrivons $F_n^c = \{Z_n \in E_2\}$. On aurait tendance maintenant d'appliquer les lemmes B, 3 et 2 (après avoir remarqué qu'on peut utiliser le lemme 2 avec $F_n = F_n^c \cap A$) pour en conclure que

$$T_n(D, A) \rightarrow \int_{F_n^c \cap A} \mu(\omega, E_1) P(d\omega) = \int_A \mu(\omega, D_{Z(\omega)}) P(d\omega) = R_\nu(D, A).$$

Cependant on doit vérifier avant d'utiliser le lemme 2 que

$R(\partial E_1, F_n^c \cap A) = 0$ si $R_\nu(\partial D, A) = 0$. Pour voir ceci il nous faudra le résultat suivant.

REMARQUE SUR LA TOPOLOGIE CLASSIQUE

Si $D \in \mathcal{B}^c$ et D_a indique la section de D en a , alors $\partial(D_a) \subset (\partial D)_a$. En particulier si $D = E_1 \times E_2$ alors $\partial E_1 \subset (\partial D)_a$.

Pour s'en convaincre, on note que si $x \in \partial(D_a)$, $x'_n \in D_a$ et

$x_n^2 \notin D_a$, $x_n^1 \rightarrow x$, $x_n^2 \rightarrow x$ et donc on a $z_n^1 = (x_n^1, a) \in D$, $z_n^2 = (x_n^2, a) \notin D$
 $z_n^1 \rightarrow (x, a)$; $z_n^2 \rightarrow (x, a)$. Donc $(x, a) \in \partial D$. Retournons à la vérification.

On a, par additivité et monotonie :

$$0 = R_\nu (\partial D, A \cap F_2) = \int_{A \cap F_2} \mu (\omega, [\partial D]_{Z(\omega)}) P (d\omega) \geq \int_{F_2 \cap A} \mu (\omega, \partial E_1) P (d\omega) \\ = R (\partial E_1, F_2 \cap A).$$

Maintenant pour vérifier la convergence faible il suffit d'utiliser un résultat de Kolmogorov et Prohorov (voir [1] Théorème 2.2, corollaire 1 et démonstration du théorème 3.1) qui démontre en effet que pour le produit Cartésien de deux espaces il suffit de démontrer la convergence pour les pavés avec frontière de probabilité zéro.

En utilisant le théorème 1 et le lemme 4 nous arrivons à notre but.

THEOREME 5

Soit M séparable. Si $\{X_n\}$ est stable et a pour m.a.a. μ , si $Z_n \rightarrow Z$ en probabilité et si g est une transformation de $M \otimes M$ dans M qui est, pour presque tout [par rapport à \mathcal{P}] ω continue presque partout [par rapport à $\nu (\omega, \cdot)$] alors $\{g (X_n, Z_n)\}$ est aussi stable et a pour m.a.a. ν^g .

REMARQUES

La définition originale de variables aléatoires stables est due à Renyi [6] . La suite historique du théorème 5 est [6] , [5] , [4] , [2] .

En ce qui concerne les applications mentionnées dans l'introduction nous ne donnons ici qu'un seul exemple destiné à tenir le lecteur en haleine.

THEOREME 6

Soit $\{X_j\}$ des variables aléatoires indépendantes avec espérance 0 et variance 1, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ et ϕ la fonction de répartition de Laplace. Alors pour n'importe quelle variable aléatoire Z (indépendante ou non des X_j !!) on a $P\left(\frac{-S_n}{\sqrt{n}} \leq Z\right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dP(Z \leq x)$, (ce qu'on attendrait si S_n et Z étaient indépendantes). On peut remplacer Z par Z_n où Z_n tend vers Z en probabilité.

Ces applications seront publiées dans des articles écrits en collaboration avec M. le Professeur Miklós Csörgő. Voir aussi [5].

Nous avons tenté, sans succès, de démontrer le lemme 4, pour $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ au lieu de \mathcal{B}^2 , sans l'hypothèse que M soit séparable. C'est M. le Professeur Donald Dawson, qui nous a mentionné que la méthode du théorème 3.1 de [1] doit s'appliquer ici aussi.

Nous avons aussi essayé de démontrer la suivante (voir [4], lemme 2.1).

CONJECTURE

Si $S(., .)$ est une bi-probabilité qui est, pour chaque B , absolument continue par rapport à $P(., .)$ alors il existe une mesure aléatoire $\theta(., .)$ telle que pour chaque $B \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{X}$, $S(B, A) = \int_A \theta(\omega, B) P(d\omega)$.

Cet article a pour base une conférence donnée par l'auteur à l'Université de Clermont. Monsieur Hennequin l'avait gracieusement invité lors de son séjour en Auvergne. C'est sous l'influence de l'école de probabilité française et surtout clermontoise, que l'auteur a tenté de présenter les variables aléatoires stables sous forme très abstraite. Nous tenons à remercier Messieurs Hennequin et Badrikian pour plusieurs critiques valables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BILLINGSLEY, P., Convergence of Probability Measures, Wiley, 1968.

- [2] FISCHLER, R., Stable Sequences of Random Variables and the Weak Convergence of the Associated Empirical Measures, à paraître dans Sankhya.

- [3] FLECHIER, Esprit, Mémoires sur les Grands Jours d'Auvergne en 1665, édition de 1856, IN-8° Côte de la Bibliothèque Nationale, [8° Lb³⁷ 156A].

- [4] KATAI, I., MOGYRODI, J., Some Remarks concerning the Stable Sequences of Random Variables, Publicationes Mathematicae Debrecen, 14(1967), 227-238.

- [5] MOGYRODI, J., A Remark on Stable Sequences of Random Variables and a Limit Distribution Theorem for a Random Sum of Independent Random Variables, Acta Math. Hung. 17(1966), 401-409.

- [6] RENYI, A., On Stable Sequences of Events Sankyhā, Ser A., 25(1963), 293-302.