ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. GUILLAUME

Sur quelques notions concernant les anneaux hilbertiens de la logique algébrique

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 35, série *Mathématiques*, n° 4 (1967), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1967__35_4_37_0>

SUR QUELQUES NOTIONS CONCERNANT LES ANNEAUX HILBERTIENS DE LA LOGIQUE ALGÉBRIQUE

M. GUILLAUME
UNIVERSITÉ DE CLERMONT

Dans le texte qui suit, pour éviter des ambiguïtés de notations, nous abrégeons "Quel que soit x ... " en "Qx ... " et "Il y a un x ..." en "Yx ...".

Nous appelons *anneau hilbertien* ([5]) tout anneau booléien H muni d'une famille $\Lambda : H \longrightarrow \mathcal{E}nd(H)$ d'endomorphismes de la structure d'anneau de H, telle que

$$(H) \quad Qx \in H \qquad x \leqslant \Lambda_x x$$

$$(N) \quad Qx \in H \;\; Qy \in H \qquad \Lambda_x \Lambda_y = \Lambda_y .$$

Alors, nous pouvons, pour tout $x \in H$, poser $\exists x = \Lambda_x x$, car l'application ainsi- définie est un *quantificateur* (existentiel) au sens de Halmos [6] ; il détermine sur H un anneau (booléien) *monadique riche*, car, pour tout $x \in H$, l'endomorphisme Λ_x en est un *témoin*.

Réciproquement, tout anneau monadique riche porte des anneaux hilbertiens (1).

Les définitions et remarques suivantes nous seront utiles par la suite : si B est un anneau monadique, $\exists$ son quantificateur, nous appelons $R = \exists(B)$ sa *charpente* ([5]) ;

1/ les *constantes* de B sont les endomorphismes de la structure d'anneau de B qui sont des *projecteurs de* B *sur* R ; ou encore, ceux de ces endomorphismes c qui satisfont à $\mathrm{Im}(c) = R$ et à $B = R \oplus \mathrm{Ker}(c)$(2) ;

2/ $Q\, x \in B$, x est *minimal* dans $\exists^{-1}(1)$ si et seulement si l'idéal (booléien) $(1 + x)$ est le *noyau* d'une constante.

Ces deux dernières propriétés ne concernent que les constantes *principales*, à savoir celles dont le *noyau* est engendré par un élément $y = 1 + x$ *seul* ([5]) ; une telle constante est un témoin *unique* de l'élément x correspondant.

Nous qualifions de *parfait* [5] tout anneau monadique possédant, pour chacun de ses éléments, un *témoin principal*.

L'anneau monadique *simple* porté par un anneau booléien *dénué d'atomes* est un exemple d'anneau monadique *riche*, mais *non parfait* ; la question de savoir si tout anneau monadique se plonge dans un anneau monadique parfait se résoud ainsi [5] : par adaptation, au-delà du cas fini, de la démonstration d'un théorème de Bass [2], on montre que tout anneau monadique de charpente complète et atomique est riche, et en outre parfait, s'il est lui-même complet et atomique ; des lemmes ((7.9) et (7.11)) de Halmos [7] (qui reposent eux-mêmes sur les théorèmes de Stone [9] et de Jonsson et Tarski [8]) assurent le plongement de tout anneau monadique dans un anneau monadique complet et atomique, à charpente elle aussi complète et atomique ; en outre ([5]) les constantes de l'anneau de base se prolongent en constantes principales(3).

----

(1) On passe du premier aux seconds en utilisant l'axiome du choix. Mais pour la plupart des besoins courants, on peut substituer à ce résultat celui de P. Jurie [10] d'après lequel tout anneau monadique peut être étendu, par une construction indépendante de l'axiome du choix, en un anneau monadique porteur d'*un* anneau hilbertien.

(2) La somme directe se rapporte aux $\mathbb{Z}/(2)$-espaces vectoriels sous-jacents. - Cette caractérisation des constantes est dûe à une remarque faite par P. Samuel dans une correspondance avec l'Auteur.

(3) Voir note page suivante

Ainsi, *tout anneau monadique se plonge dans un anneau monadique parfait*, à isomorphisme près du type suivant :

L'anneau booléien sous-jacent est celui *des* parties d'un ensemble E muni d'une partition $\mathfrak{K}$, et pour tout $X \in \mathfrak{P}(E)$, $\exists X$ est la *réunion* des classes de $\mathfrak{K}$ *rencontrées par* X (on l'obtient en *saturant* X pour la relation d'équivalence associée à $\mathfrak{K}$). Soit K un *système de représentants* des classes de $\mathfrak{K}$; l'application c qui, à chaque $X \in \mathfrak{P}(E)$, associe $cX = \exists(KX)$ (la réunion des classes de $\mathfrak{K}$ *dont le représentant est dans* X), est une *constante* de l'anneau monadique déterminé par le quantificateur $\exists$, et c'est un *témoin principal* de K, car on a $cK = \exists K = E$ (K est dans $\exists^{-1}(E)$) et si l'on remplace K par une de ses parties *propres* L, cette propriété disparaît, car il y a une classe de $\mathfrak{K}$ que L ne rencontre pas (K est *minimal* dans $\exists^{-1}(E)$). Or, on peut s'arranger, X étant donnée, pour choisir K de telle sorte que le représentant d'une classe qui rencontre X soit dans la trace de cette classe sur X, de telle sorte qu'on aura $cX = \exists X$.

Un tel anneau monadique porte un anneau hilbertien, qu'on peut décrire ainsi : à chaque $X \in \mathfrak{P}(E)$, on associe d'abord un système K_X de représentants des classes de $\mathfrak{K}$, et ensuite, pour tout $Y \in \mathfrak{P}(E)$, on note $\Lambda_X Y$, *la réunion des classes de* $\mathfrak{K}$ *dont les représentants dans le systeme* K_X *appartiennent à* Y. On vérifie aisément que pour tout $X \in \mathfrak{P}(E)$, Λ_X est un endomorphisme de l'anneau booléien porté par $\mathfrak{P}(E)$, et que la famille des Λ_X satisfait aux axiomes (H) et (N).

On peut être tenté de chercher un autre exemple dans un *calcul de prédicats restreint du premier ordre, monadique, avec symbole de Hilbert*, tel que le τ utilisé par Bourbaki [4] (auquel nous empruntons les notations non expliquées par la suite) ; soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des formules d'un tel calcul, ξ sa variable, $F(\xi)$, $G(\xi)$, ... , des formules de $\mathfrak{F}$, et $\mathcal{R}$ la relation d'*équidéductibilité* sur $\mathfrak{F}$. Il est bien connu que $\mathfrak{F}/\mathcal{R}$ est muni d'une structure canonique d'anneau booléien ; soit * la surjection canonique. On cherche à obtenir un anneau hilbertien en posant

$$\mathrm{Q}F(\xi)\in\mathfrak{F} \qquad \mathrm{Q}G(\xi)\in\mathfrak{F} \qquad \Lambda_{F(\xi)^*}\, G(\xi)^* = [(\tau(F(\xi)) \mid \xi) G(\xi)]^* \quad (i).$$

Alors (H) traduira l'obéissance du système formel au schéma $S5$ de [4] - celui que Beth [3] appelle le *postulat faible* pour le symbole de Hilbert : ... $F(\xi) \longrightarrow (\exists\xi) F(\xi)$, et ($N$) résultera du "fait technique" que les prédicats étant *monadiques*, *toutes les possibilités de substitution sont épuisées* après qu'*une* telle opération ait été effectuée sur une variable libre.

Mais pour que (i) fût correcte, il faudrait que, *de* $F(\xi)$ *équidéductible à* $G(\xi)$, *l'on pût passer à* $\Lambda_{F(\xi)^*} = \Lambda_{G(\xi)^*}$; cela *peut* se faire, *lorsque*, d'une démonstration de $(\forall\xi)\ (F(\xi) \longleftrightarrow G(\xi))$, *l'on peut* conclure - en présence d'une *égalité* - à une démonstration de $\tau_\xi(F(\xi)) = \tau_\xi(G(\xi))$ (où = est le signe d'égalité du système formel), autrement dit, *lorsque le traitement de l'égalité comporte usage au postulat fort* ([3] ; il s'agit du $S7$ de ([4]). On a bien, *alors*, muni $\mathfrak{F}/\mathfrak{A}$ d'une structure d'*anneau hilbertien* par le procédé décrit (en fait, quoique sans le *postulat fort*, la situation du point de vue algébrique soit moins belle, nous avons montré dans [5] qu'elle s'écarte peu de ce qu'elle est en sa présence).

Cet exemple nous conduit à la notion d'*égalité* sur un anneau hilbertien H. Nous appelons ainsi ([5]) toute application $\approx\ : H^2 \longrightarrow H$ satisfaisant aux conditions

$$(P) \qquad \mathrm{Q}x \in H \qquad \mathrm{Y}\omega \in H \qquad \mathrm{Q}y \in H \qquad \approx xy = \Lambda_y \omega$$

$$(E_1) \qquad \mathrm{Q}x \in H \qquad \mathrm{Q}y \in H \qquad \mathrm{Q}z \in H \qquad \Lambda_x z + \Lambda_y z \leqslant 1 + \approx xy$$

$$(E_2) \qquad \mathrm{Q}x \in H \qquad \approx xx = 1.$$

----

(3) La raison profonde de ce groupe de faits peut s'expliquer brièvement, dans le langage plus moderne de la théorie des catégories, de la façon suivante : le théorème de Jonsson et Tarski (qui repose lui-même sur celui de Stone) permet de décrire un *foncteur* +, défini sur la catégorie des *hémimorphismes* (au sens de Halmos [6]) d'anneaux booléiens, à valeurs dans la catégorie des *hémimorphismes complets* (en un sens évident ; il s'agit d'"additivité complète" au sens de Jonsson et Tarski) d'anneaux booléiens *complets et atomique*; ce foncteur conserve les qualités d'*homomorphisme* et de *quantificateur* (Halmos [7], (7.11)) ; le théorème de Stone introduit des *plongements* constituant une *transformation naturelle* (ou *morphisme fonctoriel*) du foncteur-identité de la première catégorie dans le foncteur + ; cela signifie que tout anneau booléien A est canoniquement *plongé* dans celui que l'on peut appeler son *complété de Stone* A^+, et que si l'on assimile les éléments des objets de la première catégorie à leurs images par ces plongements, tout hémimorphisme *h se prolonge en* l'hémimorphisme complet h^+; ainsi, si $\exists$ est un quantificateur sur un anneau booléien A, on a $\exists^+(A^+) = (\exists(A))^+$, et les constantes associées au quantificateur $\exists$ se prolongent en constantes *complètes* associées au quantificateur $\exists^+$, et ces dernières ne peuvent avoir pour noyau qu'un idéal engendré par sa borne supérieure, toujours présente dans un anneau booléien complet.

Dans l'exemple qui vient d'être traité, on posera, pour toutes les formules $F(\xi) \in \mathfrak{F}$ et $G(\xi) \in \mathfrak{F}$, $\approx F(\xi)^* G(\xi)^* = [\tau_\xi(F(\xi)) = \tau_\xi(G(\xi))]^*$; on définira ainsi une égalité sur l'anneau hilbertien porté par $\mathfrak{F}/\mathcal{R}$, car alors :

(P) résultera du "fait technique" que *si* $x = F(\xi)^*$ *et* $\omega = [\tau_\xi(F(\xi)) = \xi]^*$ *et* $y = G(\xi)^*$, on a

$$[\tau_\xi(F(\xi)) = \tau_\xi(G(\xi))] = (\tau_\xi(G(\xi)) | \xi) \; [\tau_\xi(F(\xi)) = \xi] \; ;$$

(E_1) traduira l'obéissance du système formel au schéma $S6$ de [4] :

$$\ldots \; \tau_\xi(F(\xi)) = \tau_\xi(G(\xi)) \longrightarrow [(\tau_\xi(F(\xi)) | \xi) \, H(\xi) \longleftrightarrow (\tau(G(\xi)) | \xi) \, H(\xi)]$$

(E_2), le fait que $\tau_\xi(F(\xi)) = \tau_\xi(F(\xi))$ possède une démonstration formelle.

On démontre l'*unicité* d'une égalité sur un anneau hilbertien H *si elle existe*, sa *symétrie* (sous la forme $\approx xy = \approx yx$), sa *transitivité* (sous la forme $(\approx xy)\ (\approx yz) \leqslant (\approx xz)$) ; sa *réflexivité* est reflétée par (E_2). Elle satisfait à l'analogue algébrique du *théorème de Leibniz* : $\approx xy = 1$ ("identité d'essence" de x et de y) si et seulement si $\Lambda_x = \Lambda_y$ ("identité de leurs propriétés"), et à l'égalité $\Lambda_x^{-1}(0) = (1 + \omega)$, où ω est l'élément (on démontre par là même qu'il est unique) associé à x selon l'axiome (P) (pour des motifs appartenant à la théorie des modèles, que nous avons examinés dans [5], un tel ω mérite le nom d'*objet* de H, et leur ensemble - ce n'est autre que celui des éléments minimaux de $\exists^{-1}(1)$ - le nom de *domaine* de H ; les éléments de H représentent une certaine famille de *propriétés* de ces objets).

Ainsi, *lorsqu'un anneau hilbertien* H *porte une égalité, l'anneau monadique sous-jacent est parfait. La réciproque est vraie*, en ce sens que si la famille Λ définissant un anneau hilbertien sur un anneau booléien H se compose de *témoins principaux* de l'anneau monadique qu'elle détermine, H *est porteur d'une égalité :* si, pour tout $x \in H$, ω est l'unique élément de H tel que $(1 + \omega) = \Lambda_x^{-1}(0)$, on l'obtient en posant, pour tout $y \in H$, $\approx xy = \Lambda_y \omega$.

L'égalité définie dans l'exemple traité plus haut satisfait en outre à la condition supplémentaire

$$(EH) \qquad Qx \in H \qquad Qy \in H \qquad 1 + \approx xy \leqslant \exists\,(x + y),$$

qui n'est autre que l'analogue algébrique du *postulat fort* ([3]).

D'une telle égalité sur un anneau hilbertien H, nous disons ([5]) qu'elle est *hilbertienne*, car il en est qui ne satisfont pas à cette condition (leurs propriétés divergent alors nettement de celles des égalités hilbertiennes).

En effet, reprenons le premier exemple cité, celui dans lequel l'anneau booléien sous-jacent est celui que porte l'ensemble des parties d'un ensemble E. Si, pour tout $X \in \mathfrak{P}(E)$ et tout $Y \in \mathfrak{P}(E)$, l'on prend pour $\approx XY$ *la réunion des classes de la partition* $\mathfrak{R}$ *dont les représentants dans les systèmes* K_X et K_Y *coïncident*, on définit une égalité sur l'anneau hilbertien précédemment défini sur $\mathfrak{P}(E)$, qui ne sera *pas hilbertienne du tout en général*: la condition (EH) signifie, en l'occurence, que *les systèmes de représentants* K_X, K_Y, K_Z, ... doivent être tels qu'ils *ne dépendent que des traces de* X, Y, Z, ... *sur les classes de* $\mathfrak{R}$; il est bien facile d'agir de façon à *ne pas* satisfaire à cette condition !

Puisque tout anneau monadique se plonge dans un anneau monadique *parfait, avec prolongement des constantes préalablement existantes en constantes principales, tout anneau hilbertien se plonge dans un anneau hilbertien porteur d'une égalité* ([5]). Or, si l'égalité obtenue est hilbertienne, il est facile de déduire, en combinant les axiomes (E_1) et (EH), que l'anneau hilbertien H dont on est parti n'est pas quelconque, mais satisfait à l'axiome (d'où $\approx$ a disparu) :

$$(PH) \qquad Qx \in H \qquad Qy \in H \qquad Qz \in H \qquad \Lambda_x z + \Lambda_y z \leqslant \exists(x + y)^{(4)}.$$

D'un tel anneau hilbertien, nous dirons ([5]) qu'il est *proprement hilbertien*. S'il porte une égalité, on montre facilement qu'elle est hilbertienne. Comme le plongement décrit d'un anneau monadique dans un anneau monadique porteur d'une égalité utilise le théorème de Stone[5], et

----

(4) C'est l'analogue algébrique d'un schéma écrit par G. Asser [1] :

$$\ldots \; (\forall \xi) \; (F(\xi) \longrightarrow G(\xi)) \longrightarrow (H(\tau_\xi(F(\xi))) \longleftrightarrow H(\tau_\xi(G(\xi)))).$$

(5) Il utilise le foncteur + de la note (3).

qu'en l'effectuant *on étend*, donc, *la famille* Λ, il n'est pas du tout évident que *tout anneau proprement hilbertien se plonge dans un anneau proprement hilbertien porteur d' une égalité* (alors hilbertienne). Nous l'avons démontré dans [5]. La démonstration est difficile : si H est l'anneau donné, il faut pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, dans un ensemble E tel que $\mathfrak{P}(E) = H^{+}$, faire correspondre à x et à y des systèmes de représentants K_x et K_y qui induisent sur H des constantes *prédéterminées*, tout en satisfaisant à la condition de tout à l'heure (où intervenaient les traces sur les classes de la partition $\mathfrak{R}$ déterminatrice, à isomorphisme près, du quantificateur $\exists^{+}$).

Cet "analogue algébrique" de l'opération d' *adjonction d'une égalité* à un système formel - si simple en logique - n'est-il pas, "algébriquement", acheté trop cher ? Nous avons dû recourir au théorème de Stone, donc à l'axiome du choix, nullement requis dans le cas du système formel. Ou la démonstration algébrique a-t-elle (du fait de l'introduction d'anneaux qui ne sont plus nécessairement *libres)* dû concerner *quelque chose de plus* que les propriétés des anneaux *libres* associés aux systèmes formels(6) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASSER G. - *Theorie des logischen Auswahlfunktionen* Z. für Math. Log. und Grundlagen der Math. 3 (1957) pp. 30-67.

[2] BASS H. - *Finite monadic algebras* Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) pp. 258-268.

[3] BETH E.W. - *Les fondements logiques des mathématiques* 2e éd. Gauthier-Villars, Paris (1955).

[4] BOURBAKI N. - *Eléments de mathématique* - Première Partie, Livre I (Théorie des Ensembles), Chap. 1 et 2 Act. Sci. Ind. n° 1212, Hermann, Paris 1954).

[5] GUILLAUME M. - *Recherches sur le symbole de Hilbert* Thèse sc. Math., Clermont, 1960.

[6] HALMOS P.R. - *Monadic boolean algebras* Compositio Mathematica 12 (1955) pp. 217-249.

[7] HALMOS P.R. - *Equality in polyadic algebras* Trans. Amer. Math. Soc. 86 (1957) pp. 1-27.

[8] JONSSON B. & TARSKI A. - *Boolean algebras with operators* Amer. J. Math. 73 (1951) pp. 891-939 et 74 (1952) pp. 127-162.

[9] STONE M.H. - *The theory of representations for boolean algebras* Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) pp. 37-111.

[10] JURIE P. - *Coproduits booléiens. Théorie générale et application à la théorie des anneaux booléiens monadiques* Thèse de 3e cycle, math. pures, Clermont, 1965.

----

(6) L'auteur conjecturait que non, et que la première hypothèse était la bonne, lorsqu'il a prononcé cette conférence. Depuis, les résultats de la thèse de 3e cycle de P. Jurie [10] sont venus renforcer cette conviction.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 289
1967