ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. PONASSE

Algébrisation du calcul proportionnel au moyen d'anneaux booléiens universels

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 35, série *Mathématiques*, n° 4 (1967), p. 33-36

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1967__35_4_33_0>

ALGÉBRISATION DU CALCUL PROPORTIONNEL AU MOYEN D'ANNEAUX BOOLEIENS UNIVERSELS

D. PONASSE

UNIVERSITÉ DE LYON

Le problème que nous allons nous poser est double :

1/ Mettre en évidence un caractère d'universalité (en un sens qui sera précisé dans la suite) du Calcul Propositionnel (classique).

2/ Rechercher des anneaux booléiens possédant ce même caractère d'universalité et obtenir ainsi une algébrisation du Calcul Propositionnel la plus étroite possible, c'est-à-dire donnant lieu non seulement à un véritable isomorphisme, mais encore à une traduction algébrique d'un procédé de décision (en l'occurence la méthode des tableaux sémantiques, due à M. Beth).

1 - PROBLEME D'UNIVERSALITE

La notion générale de problème d'universalité est la suivante :

- Les données sont :
  - 2 types de structures : S (ensembles notés E_S)
    T (ensembles notés E_T)
  - 2 types d'application : (S, T)-applications : d'un E_S dans un E_T
    T-applications : d'un E_T dans un autre E_T

Ces données doivent satisfaire à certaines conditions simples et classiques.

- On appelle solution de ce problème universel pour un ensemble E_S donné, tout couple (U_T, u) où u est une (S, T)-application de E_S dans U_T, telle que pour tout ensemble E_T et toute (S,T)-application f de E_S dans E_T il existe une T-application g de U_T dans E_T telle que l'on puisse écrire: $f = g_o u$ et ceci de façon unique.

Ceci est résumé par le schéma :

$$\begin{tikzcd} & U_T \arrow[d, "g\ \text{unique}"] \\ E_S \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "f"'] & E_T \end{tikzcd}$$

Moyennant certaine condition (qui sera remplie dans les cas qui nous occuperont), on montre qu'il y a unicité de la solution à un isomorphisme près.

Un exemple classique est celui du corps des fractions d'un anneau intègre, universel vis à vis de cet anneau. .

2 - UNIVERSALITE DU CALCUL PROPOSITIONNEL

Soient :

$\mathfrak{F}$: ensemble des formules (w.f.f.) du Calcul Propositionnel (notées P, Q, R, ...), construites à partir d'un ensemble $\mathcal{A}$ d'atomes (p, q, r, ...) et des symboles logiques $- \wedge \vee \longrightarrow \longleftrightarrow$.

$\mathfrak{T}$: ensemble des formules démontrables.

R : relation d'équivalence dans $\mathfrak{F}$: $P \longleftrightarrow Q \in \mathfrak{T}$

$\mathfrak{F}/R$ est alors un anneau booléien, soit φ l'application canonique de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}/R$.

On a alors le résultat fondamental suivant : $\mathfrak{F}/R$ et $\varphi_{\mathfrak{A}}$ (restriction de φ à $\mathfrak{A}$), associés à $\mathfrak{A}$, sont universels pour les données :

E_S : ensembles quelconques (structure vide)

E_T : anneaux booléiens

(S,T)-applications : toutes les applications

T-applications : homomorphismes d'anneaux booléiens.

Nous allons maintenant construire une autre solution de ce même problème universel, cette construction se fera en complète analogie avec le Calcul Propositionnel, c'est-à-dire en deux temps :

- phase "prébooléienne" (correspondant à $\mathfrak{F}$)
- phase "booléienne" (correspondant à $\mathfrak{F}/R$)

par ailleurs, elle sera guidée par le souci d'algébriser les tableaux sémantiques.

3 - ENSEMBLE PREBOOLEIEN

Nous définirons la structure d'ensemble prébooléien par les données suivantes :

- un ensemble non vide F (éléments $x, y, z, \ldots$)
- une loi interne : $(x,y) \longrightarrow x.y$ ("produit")
- une application interne : $x \longrightarrow -x$ ("négation")
- une famille non vide $(C_k)_K$ de parties de F ("famille déductive")

vérifiant les 2 axiomes :

$$P1/ x \in C_k \Longleftrightarrow -x \notin C_k$$
$$P2/ x.y \in C_k \Longleftrightarrow x \in C_k \text{ et } y \in C_k$$

Quelques définitions :

- "puits" de F : $T = \bigcap C_k$
- "relation d'anlogie" xRy dans F, qui s'exprime par : pour tout k, $x \in C_k$ et $y \in C_k$ ou $x \notin C_k$ et $y \notin C_k$.

Par passage au quotient on obtient un anneau booléien F/R.

- "préhomomorphisme" f de F dans F' : $f(x.y) R' f(x).f(y)$

$f(-y) R' -f(x)$

$f(T) \subset T'$

Exemples :

1/ Tout anneau booléien B avec tous les ultrafiltres comme famille déductive (ce sera la structure "normale").

2/ $\mathfrak{F}$ avec les systèmes déductifs complets comme famille déductive, c'est-à-dire les parties V de $\mathfrak{F}$ telles que : $P \in V \Longleftrightarrow -P \notin V$; $P \wedge Q \in V \Longleftrightarrow P \in V$ et $Q \in V$; etc.. Le puits est alors $\mathfrak{T}$.

3/ Ensemble prébooléien $\ddot{E}$: Soit E un ensemble quelconque, (E, 0, 1) désignera ce même ensemble complété par deux éléments 0 et 1.

$\ddot{E}$ sera l'ensemble des tableaux du type :

$$\alpha = \left\langle \begin{matrix} x_1 \ldots x_n & & z_1 \ldots z_p \\ & \ldots & \\ x'_1 \ldots x'_n & & z'_1 \ldots z'_p \end{matrix} \right\rangle$$

où $x, z, \ldots$ sont des éléments de $(E, 0, 1)$ formés d'un certain nombre de colonnes comportant chacune deux blocs (supérieurs et inférieurs), avec la restriction que chaque bloc supérieur doit contenir au moins un 1 et chaque bloc inférieur au moins un 0.

Une colonne sera dite close si l'intersection de ses deux blocs n'est pas vide (sinon ouverte), le tableau lui-même sera clos si toutes ses colonnes sont closes (sinon ouvert).

On définira les opérations suivantes dans $\ddot{E}$:

- Multiplication : on met les tableaux bout à bout

$$\langle K_1 \cdots K_n \rangle \cdot \langle Q_1 \cdots Q_p \rangle = \langle K_1 \cdots K_n\, Q_1 \cdots Q_p \rangle$$

- Disjonction : on "réunit" les tableaux colonne par colonne :

$$\langle K_1 \cdots K_n \rangle \vee \langle Q_1 \cdots Q_p \rangle = \langle K_1Q_1\, K_1Q_2 \cdots K_1Q_p\, K_2Q_1 \cdots K_nQ_p \rangle$$

- Négation :

$$\text{a)} \quad - \left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_n \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 & & 1 & 1x'_1 & & 1x'_n \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0x_1 & & 0x_n & 0 & & 0 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\text{b)} \quad -(\alpha_1 . \alpha_2 . \cdots . \alpha_p) = (-\alpha_1) \vee (-\alpha_2) \vee \ldots \vee (-\alpha_p)$$

On notera $\vec{E}$ l'ensemble des applications de E dans $U = (0, 1)$, et pour une telle application f on définira la f-valeur, $\ddot{f}(\alpha)$, d'un tableau α, comme étant le tableau déduit de α en y remplaçant tous les éléments de E par leurs images par f. Il en résultera les notions de tableaux f-clos ou f-ouverts. Un tableau f-clos pour tout f sera dit infermable (sinon fermable).

On constate alors que $\ddot{E}$ est un ensemble prébooléien pour les opérations précédentes et pour la famille déductive $(C_f)_{\vec{E}}$ où C_f désigne l'ensemble des tableaux f-clos.

4 - ANNEAU BOOLEIEN UNIVERSEL < E >

Nous appellerons $\langle E \rangle$ l'anneau booléien engendré par l'ensemble prébooléien $\ddot{E}$ que nous venons de construire, ses éléments seront appelés des grilles (classes d'analogie des tableaux) et notés :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n & & z_1 \cdots z_p \\ & \cdots & \\ x'_1 \cdots x'_n & & z'_1 \cdots z'_p \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

On désignera par H l'application de E dans $\langle E \rangle$ définie par :

$$H(x) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

On démontre alors :

$\langle E \rangle$ et H, associés à E, sont universels pour le même problème que précédemment.

En prenant $E = \mathfrak{A}$, on a alors le résultat fondamental :

$\mathfrak{F}/R$ et $\langle \mathfrak{A} \rangle$ sont isomorphes.

On a :

$$\mathfrak{F} \xrightarrow[\text{canon.}]{\varphi} \mathfrak{F}/R \xrightarrow[\text{isom.}]{\mu} \langle \mathfrak{A} \rangle$$

A toute formule P on peut donc associer l'élément de $\langle \mathfrak{A} \rangle$: $r(P) = \mu(\varphi(P))$ qui sera dit le tableau de réduction achevé (tra) de P.

Le calcul d'un tra est aisé du fait que cette application r est un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans $\langle \mathfrak{A} \rangle$, dont la valeur pour un atome p est :

$$r(p) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ Op \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

On obtient alors des traductions telles que :
P est une formule exacte $\Longleftrightarrow$ r(P) est clos.

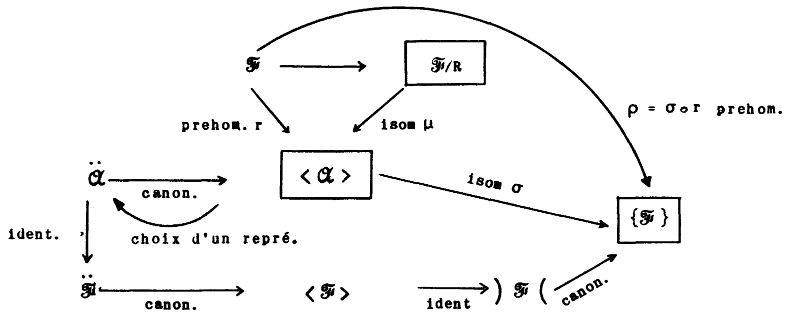
D'une façon plus générale r(P) permet d'analyser complètement P à partir de ses atomes, de mettre P sous une forme normale conjonctive ou disjonctive,...

Un tra se présente comme l'achèvement d'un tableau sémantique, il serait donc plus intéressant de chercher à construire un autre anneau booléien dans lequel les opérations d'achévement soient intérieures aux grilles

5 - ANNEAU BOOLEIEN UNIVERSEL $\{\mathfrak{F}\}$

Par définition $\{\mathfrak{F}\}$ sera l'anneau booléien engendré par l'ensemble prébooléien $)\mathfrak{F}($ dont les éléments et les opérations sont les mêmes que dans $<\mathfrak{F}>$, mais où la famille déductive se compose seulement de $(C_f)_{\vec{\pi}}$ ou $\vec{\pi}$ désigne l'ensemble des préhomomorphismes de $\mathfrak{F}$ dans U (identifié à $Z/(2)$) .

On montre que cet anneau $\{\mathfrak{F}\}$ est isomorphe à $<\mathfrak{A}>$, et l'on a le diagramme général suivant :



A toute formule P on associe donc maintenant l'élément de $\{\mathfrak{F}\}$: $\rho(P)$ qui sera dit le tableau de réduction inachevé (tri) de P.

Le tri se calcule à partir de sa forme "première" :

$$\rho(P) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ OP \end{matrix} \right\}$$

et par application de 10 opérations de réduction internes, par exemple :

$$\left\{ \left| \begin{matrix} ? \\ ?-P? \end{matrix} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{matrix} ?P \\ ?\,? \end{matrix} \right| \right\}$$

on réduit successivement le tri à sa forme "dernière" qui est le tra.

On a ainsi finalement un anneau booléien universel isomorphe à $\mathfrak{F}/R$ muni d'opérations algébriques internes traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques.