

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

D. PONASSE

**Algébrisation du calcul proportionnel au moyen  
d'anneaux booléens universels**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 35, série *Mathématiques*, n° 4 (1967), p. 33-36

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1967\\_\\_35\\_4\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1967__35_4_33_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ALGÉBRISATION DU CALCUL PROPOSITIONNEL AU MOYEN D'ANNEAUX BOOLEIENS UNIVERSELS

D. PONASSE  
UNIVERSITÉ DE LYON

Le problème que nous allons nous poser est double :

1/ Mettre en évidence un caractère d'universalité (en un sens qui sera précisé dans la suite) du Calcul Propositionnel (classique).

2/ Rechercher des anneaux booléens possédant ce même caractère d'universalité et obtenir ainsi une algébrisation du Calcul Propositionnel la plus étroite possible, c'est-à-dire donnant lieu non seulement à un véritable isomorphisme, mais encore à une traduction algébrique d'un procédé de décision (en l'occurrence la méthode des tableaux sémantiques, due à M. Beth).

## 1 - PROBLEME D'UNIVERSALITE

La notion générale de problème d'universalité est la suivante :

● Les données sont :

- 2 types de structures : S (ensembles notés  $E_S$ )

T (ensembles notés  $E_T$ )

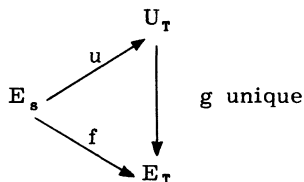
- 2 types d'application : (S,T)-applications : d'un  $E_S$  dans un  $E_T$

T-applications : d'un  $E_T$  dans un autre  $E_T$

Ces données doivent satisfaire à certaines conditions simples et classiques.

● On appelle solution de ce problème universel pour un ensemble  $E_S$  donné, tout couple  $(U_T, u)$  où  $u$  est une (S,T)-application de  $E_S$  dans  $U_T$ , telle que pour tout ensemble  $E_T$  et toute (S,T)-application  $f$  de  $E_S$  dans  $E_T$  il existe une T-application  $g$  de  $U_T$  dans  $E_T$  telle que l'on puisse écrire:  $f = g \circ u$  et ceci de façon unique.

Ceci est résumé par le schéma :



Moyennant certaine condition (qui sera remplie dans les cas qui nous occuperont), on montre qu'il y a unicité de la solution à un isomorphisme près.

Un exemple classique est celui du corps des fractions d'un anneau intègre, universel vis à vis de cet anneau.

## 2 - UNIVERSALITE DU CALCUL PROPOSITIONNEL

Soient :

$\mathfrak{F}$  : ensemble des formules (w.f.f.) du Calcul Propositionnel (notées P,Q,R,...), construites à partir d'un ensemble  $\mathcal{A}$  d'atomes (p,q,r,...) et des symboles logiques  $- \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ .

$\mathfrak{I}$  : ensemble des formules démontrables.

$R$  : relation d'équivalence dans  $\mathfrak{F} : P \longleftrightarrow Q \in \mathfrak{I}$

$\mathfrak{F}/R$  est alors un anneau booléien, soit  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathfrak{F}$  dans  $\mathfrak{F}/R$ .

On a alors le résultat fondamental suivant :  $\mathfrak{F}/R$  et  $\varphi_{\alpha}$  (restriction de  $\varphi$  à  $\alpha$ ), associés à  $\alpha$ , sont universels pour les données :

$E_S$  : ensembles quelconques (structure vide)

$E_T$  : anneaux booléiens

(S,T)-applications : toutes les applications

T-applications : homomorphismes d'anneaux booléiens.

Nous allons maintenant construire une autre solution de ce même problème universel, cette construction se fera en complète analogie avec le Calcul Propositionnel, c'est-à-dire en deux temps :

- phase "prébooléienne" (correspondant à  $\mathfrak{F}$ )

- phase "booléienne" (correspondant à  $\mathfrak{F}/R$ )

par ailleurs, elle sera guidée par le souci d'algrébriser les tableaux sémantiques.

### 3 - ENSEMBLE PREBOOLEIEN

Nous définirons la structure d'ensemble prébooléien par les données suivantes :

- un ensemble non vide  $F$  (éléments  $x, y, z, \dots$ )

- une loi interne :  $(x, y) \longrightarrow x.y$  ("produit")

- une application interne :  $x \longrightarrow \neg x$  ("négation")

- une famille non vide  $(C_k)_k$  de parties de  $F$  ("famille déductive")

vérifiant les 2 axiomes :

$$P1/x \in C_k \iff x \notin C_k$$

$$P2/x.y \in C_k \iff x \in C_k \text{ et } y \in C_k$$

Quelques définitions :

- "puits" de  $F$  :  $T = \bigcap C_k$

- "relation d'anlogie"  $xRy$  dans  $F$ , qui s'exprime par : pour tout  $k$ ,  $x \in C_k$  et  $y \in C_k$  ou  $x \notin C_k$  et  $y \notin C_k$ .

Par passage au quotient on obtient un anneau booléien  $F/R$ .

- "préhomomorphisme"  $f$  de  $F$  dans  $F'$  :  $f(x.y)R'f(x).f(y)$

$$f(\neg x)R'\neg f(x)$$

$$f(T) \subset T'$$

Exemples :

1/ Tout anneau booléien  $B$  avec tous les ultrafiltres comme famille déductive (ce sera la structure "normale").

2/  $\mathfrak{F}$  avec les systèmes déductifs complets comme famille déductive, c'est-à-dire les parties  $V$  de  $\mathfrak{F}$  telles que :  $P \in V \iff \neg P \notin V$  ;  $P \wedge Q \in V \iff P \in V \text{ et } Q \in V$  ; etc.. Le puits est alors  $\mathfrak{I}$ .

3/ Ensemble prébooléien  $\ddot{E}$  : Soit  $E$  un ensemble quelconque,  $(E, 0, 1)$  désignera ce même ensemble complété par deux éléments 0 et 1.

$\ddot{E}$  sera l'ensemble des tableaux du type :

$$\alpha = \left\langle \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & & z_1 \dots z_p \\ \dots & & \dots \\ x'_1 \dots x'_n & & z'_1 \dots z'_p \end{array} \right\rangle$$

où  $x, z, \dots$  sont des éléments de  $(E, 0, 1)$  formés d'un certain nombre de colonnes comportant chacune deux blocs (supérieurs et inférieurs), avec la restriction que chaque bloc supérieur doit contenir au moins un 1 et chaque bloc inférieur au moins un 0.

Une colonne sera dite close si l'intersection de ses deux blocs n'est pas vide (sinon ouverte), le tableau lui-même sera clos si toutes ses colonnes sont closes (sinon ouvert).

On définira les opérations suivantes dans  $\ddot{E}$  :

- Multiplication : on met les tableaux bout à bout

$$\langle K_1 \dots K_n \rangle \cdot \langle Q_1 \dots Q_p \rangle = \langle K_1 \dots K_n Q_1 \dots Q_p \rangle$$

- Disjonction : on "réunit" les tableaux colonne par colonne :

$$\langle K_1 \dots K_n \rangle \vee \langle Q_1 \dots Q_p \rangle = \langle K_1 Q_1 K_1 Q_2 \dots K_1 Q_p K_2 Q_1 \dots K_n Q_p \rangle$$

- Négation :

$$a) - \left\langle \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ x'_1 \dots x'_n \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cccc} 1 & & 1 & 1x'_1 & 1x'_n \\ & \dots & & & \\ 0x_1 & & 0x_n & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$b) -(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p) = (-\alpha_1) \vee (-\alpha_2) \vee \dots \vee (-\alpha_p)$$

On notera  $\vec{E}$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $U = (0, 1)$ , et pour une telle application  $f$  on définira la  $f$ -valeur,  $\vec{f}(\alpha)$ , d'un tableau  $\alpha$ , comme étant le tableau déduit de  $\alpha$  en y remplaçant tous les éléments de  $E$  par leurs images par  $f$ . Il en résultera les notions de tableaux  $f$ -clos ou  $f$ -ouverts. Un tableau  $f$ -clos pour tout  $f$  sera dit infermable (sinon fermable).

On constate alors que  $\ddot{E}$  est un ensemble prébooléen pour les opérations précédentes et pour la famille déductive  $(C_r)_{\vec{E}}$  où  $C_r$  désigne l'ensemble des tableaux  $f$ -clos.

#### 4 - ANNEAU BOOLEIEN UNIVERSEL $\langle E \rangle$

Nous appellerons  $\langle E \rangle$  l'anneau booléen engendré par l'ensemble prébooléen  $\ddot{E}$  que nous venons de construire, ses éléments seront appelés des grilles (classes d'analogie des tableaux) et notés :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \left\langle \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & \dots & z_1 \dots z_p \\ x'_1 \dots x'_n & \dots & z'_1 \dots z'_p \end{array} \right\rangle \right\rangle$$

On désignera par  $H$  l'application de  $E$  dans  $\langle E \rangle$  définie par :

$$H(x) = \left\langle \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x \end{array} \right\rangle \right\rangle$$

On démontre alors :

$\langle E \rangle$  et  $H$ , associés à  $E$ , sont universels pour le même problème que précédemment.

En prenant  $E = \mathcal{A}$ , on a alors le résultat fondamental :

$\mathfrak{F}/R$  et  $\langle \mathcal{A} \rangle$  sont isomorphes.

On a :

$$\mathfrak{F} \xrightarrow[\text{canon.}]{\varphi} \mathfrak{F}/R \xrightarrow[\text{isom.}]{\mu} \langle \mathcal{A} \rangle$$

A toute formule  $P$  on peut donc associer l'élément de  $\langle \mathcal{A} \rangle$  :  $r(P) = \mu(\varphi(P))$  qui sera dit le tableau de réduction achevé (tra) de  $P$ .

Le calcul d'un tra est aisé du fait que cette application  $r$  est un préhomomorphisme de  $\mathfrak{F}$  dans  $\langle \mathcal{A} \rangle$ , dont la valeur pour un atome  $p$  est :

$$r(p) = \left\langle \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \text{Op} \end{array} \right\rangle \right\rangle$$

On obtient alors des traductions telles que :  
 $P$  est une formule exacte  $\iff r(P)$  est clos.

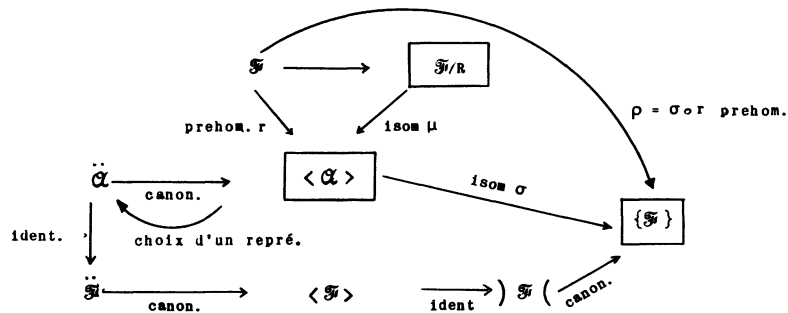
D'une façon plus générale  $r(P)$  permet d'analyser complètement  $P$  à partir de ses atomes, de mettre  $P$  sous une forme normale conjonctive ou disjonctive,...

Un tra se présente comme l'achèvement d'un tableau sémantique, il serait donc plus intéressant de chercher à construire un autre anneau booléen dans lequel les opérations d'achèvement soient intérieures aux grilles

## 5 - ANNEAU BOOLEIEN UNIVERSEL $\{\mathfrak{F}\}$

Par définition  $\{\mathfrak{F}\}$  sera l'anneau booléen engendré par l'ensemble prébooléen  $\mathfrak{F}$  (dont les éléments et les opérations sont les mêmes que dans  $\langle \mathfrak{F} \rangle$ , mais où la famille déductive se compose seulement de  $(C_i)_{\vec{\pi}}$  ou  $\vec{\pi}$  désigne l'ensemble des préhomomorphismes de  $\mathfrak{F}$  dans  $U$  (identifié à  $Z/2$ )).

On montre que cet anneau  $\{\mathfrak{F}\}$  est isomorphe à  $\langle \mathfrak{A} \rangle$ , et l'on a le diagramme général suivant :



A toute formule  $P$  on associe donc maintenant l'élément de  $\{\mathfrak{F}\}$  :  $\rho(P)$  qui sera dit le tableau de réduction inachevé (tri) de  $P$ .

Le tri se calcule à partir de sa forme "première" :

$$\rho(P) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \text{OP} \end{array} \right\}$$

et par application de 10 opérations de réduction internes, par exemple :

$$\left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?-P? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ?P \\ ?? \end{array} \right| \right\}$$

on réduit successivement le tri à sa forme "dernière" qui est le tra.

On a ainsi finalement un anneau booléen universel isomorphe à  $\mathfrak{F}/R$  muni d'opérations algébriques internes traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques.