ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JEAN-MARIE SOURIAU

Équations d'onde en relativité pentadimensionnelle

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 179-181

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_179_0>

ÉQUATIONS D'ONDE EN RELATIVITÉ PENTADIMENSIONNELLE

Jean-Marie SOURIAU
(Marseille)

Nous avons proposé en 1958 une théorie relativiste où l'univers est une variété V de dimension 5, homéomorphe au tube $R^4 \times T$ (T = cercle de dimension 1), munie d'une structure riemanienne hyperbolique normale vérifiant les équations d'Einstein (I, II, III). On ne fait aucune hypothèse de stationnarité : c'est parce que la cinquième dimension est "microscopique" qu'elle n'est pas apparente ; ce sont diverses approximations qui conduisent à la théorie de Jordan-Thiry (donc aux équations de Maxwell et d'Einstein quadridimensionnelles), à la relativité générale ou à la relativité restreinte.

La théorie est donc *essentiellement pentadimensionnelle*, et ses formulations à 4 dimensions doivent être considérées comme des artifices destinés à faciliter les passages déductifs et inductifs de la théorie à l'expérience.

Par exemple, on peut penser que les équations d'onde usuelles des bosons et fermions sont des approximations quadridimensionnelles d'équations d'onde sur V, que nous allons examiner.

EQUATION DE KLEIN-GORDON -

Nous avons déjà étudié (III) l'équation :

$$\boxed{\pentagon\, \varphi + a\varphi = 0} \qquad (1)$$

$\pentagon$ = équivalent pentadimensionnel du laplacien,

a = constante réelle,

φ = variable réelle

En prenant des coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 (telles que la substitution $x^5 \longrightarrow x^5 + 2\pi$ laisse invariant le point correspondant de V), on peut décomposer φ en série de Fourier suivant x^5 :

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x^\mu)\, e^{i n x^5} \qquad (\mu = 1,2,3,4) \qquad (2)$$

En faisant les approximations qui conduisent à la relativité restreinte, on constate que chaque composante φ_n vérifie l'équation quadridimensionnelle :

$$\Box\, \varphi_n - \frac{4\, i n \sqrt{G}}{c\,\xi} A^\mu \partial_\mu \varphi_n + \left[a + \frac{n^2}{\xi^2} - 4\,\frac{G}{c^2\,\xi^2}\, n^2 A^\mu A_\mu\right]\varphi_n = 0 \qquad (3)$$

avec les notations suivantes :

$\Box$ = opérateur de d'Alembert,

G = constante de gravitation de Newton,

A_μ = potentiels électromagnétiques,

c = vitesse de la lumière,

ξ = $\sqrt{-g_{55}}$ = "rayon" du tube-univers.

On reconnait l'équation de Klein-Gordon d'une particule de masse $\frac{\hbar}{c}\sqrt{a + \frac{n^2}{\xi^2}}$ et de charge électrique $\frac{2n\hbar\sqrt{G}}{c\xi}$ $\left(\hbar = \frac{\text{constante de Planck}}{2\pi}\right)$, en présence du champ magnétique. Ainsi la théorie donne une origine géométrique aux termes d'interaction électromagnétique (ainsi d'ailleurs qu'à l'invariance de jauge) et montre que la charge électrique est un multiple entier de $e = \frac{2\hbar\sqrt{G}}{c\xi}$; en identifiant e à la charge de l'électron, on trouve $\xi = 3,77\ 10^{-32}$ cm, ce qui justifie à posteriori l'hypothèse suivant laquelle ξ est très petit (rappelons que les dimensions des particules élémentaires sont de l'ordre de 10^{-13} cm).

EQUATION DE DIRAC -

Soit $\mathfrak{S}$ un espace vectoriel quaternionique de dimension 2 (donc de dimension réelle 8) ; munissons-le d'un produit scalaire réel $<,>$, bilinéaire, symétrique et régulier, tel que l'on ait :

$$< \psi' \ \psi q > \equiv < \psi' \bar{q}, \psi > \tag{4}$$

ψ, $\psi' \in \mathfrak{S}$; ψq = produit de ψ par le quaternion q ;

$\bar{q}$ = quaternion conjugué de q). Supposons que l'indice d'inertie quaternionique de $\mathfrak{S}$ soit 1 (l'indice d'inertie réel est alors égal à 4).

Si nous prenons, comme variable de champ en tout point X de V le septuplet $(\vartheta, \varphi, \beta_j)$:

$\vartheta \in \mathfrak{S}$

$\varphi \in \mathfrak{S}^*$ = dual quaternionique de $\mathfrak{S}$,

β_j = opérateurs quaternioniquement linéaires sur $\mathfrak{S}$, hermitiens pour le produit scalaire $< >$, et de trace nulle (j = 1,2,3,4,5).

On vérifie algébriquement que les anticommutateurs $[\beta_j, \beta_k]_+$ sont scalaires réels, et que l'on peut réaliser la liaison :

$$[\beta_j, \beta_k]_+ = 2\, g_{jk}\, 1_{\mathfrak{S}} \tag{5}$$

les g_{jk} étant les composantes du tenseur métrique de V au point X.

Il existe alors un lagrangien (1), à savoir :

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}\left(\varphi.\ \beta^j.\ \partial_j \vartheta - \partial_j \varphi.\ \beta^j.\ \vartheta - \frac{1}{4}\ \varphi\beta^j [\partial_j \beta_k - \partial_k \beta_j]\ \beta^k \vartheta + 2a\varphi\vartheta\right) \tag{6}$$

$(\beta^j = g^{jk}\beta_k$; a = constante réelle ; $\mathcal{R}(q)$ = partie réelle d'un quaternion q) qui possède simultanément les trois invariances suivantes :

I_1 : invariance par les changements de coordonnées pentadimensionnelles,

I_2 : invariance par les substitutions :

$$\varphi \longrightarrow \varphi U^{-1}$$
$$\beta_j \longrightarrow U\ \beta_j\, U^{-1}$$
$$\vartheta \longrightarrow U\vartheta$$

où U désigne un opérateur sur $\mathfrak{S}$, variable avec X, à la fois quaternioniquement linéaire et conservant (au signe près) le produit $< >$; il résulte de cette invariance que l'on peut choisir arbitrairement les β_j vérifiant (5) :

I_3 : invariance par les substitutions :

----

(1) L'usage de ce lagrangien est équivalent à l'algorithme de la dérivation covariante des spineurs.

$$\varphi \longrightarrow q^{-1}\,\varphi$$
$$\beta_j \longrightarrow \beta_j$$
$$\vartheta \longrightarrow \vartheta\, q$$

où q est un quaternion *fixe* non nul.

Nous donnerons ailleurs (IV) l'interprétation détaillée de ces invariances, ainsi que la discussion des équations aux variations auxquelles conduit le lagrangien $\mathcal{L}$; indiquons seulement que l'on trouve, en considérant l'harmonique 1 dans le développement en série de Fourier suivant x^5, et en faisant l'approximation de la relativité restreinte, l'équation :

$$\gamma^{\mu}\left[\partial_{\mu}\psi + \frac{ie}{\hbar} A_{\mu}\psi\right] + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \tag{7}$$

et l'équation conjuguée, on a posé :

i = un quaternion de carré -1 ;

$\gamma^{\mu} = i\beta_5\beta^{\mu}$ = matrices de Dirac choisies *ad libitum* ;

$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$;

$\vartheta = e^{i[\rho\beta^5 + x^5]}\,\psi(x^{\mu})$;

ρ, m constantes réelles liées à a.

On reconnait *l'équation de Dirac, en présence du champ électromagnétique,* pour une particule de charge e, de masse m (le choix du quaternion i donne en effet à $\mathfrak{S}$ la structure d'espace vectoriel complexe de dimension 4 usuelle pour les spineurs) .

En conclusion, on constate que la structure géométrique de la théorie pentadimensionnelle introduit automatiquement dans les équations d'onde les termes d'interaction électromagnétique, et montre que les charges électriques sont les multiples d'une charge élémentaire, indépendante de la masse et du spin de la particule.

REFERENCES

(I) J. M. SOURIAU - C. R. A. S., 247, 1559 (1958).

(II) J. M. SOURIAU - C. R. A. S., 248, 1458 (1959).

(III) J. M. SOURIAU - Coll. Intern. théor. relativ. grav. et électr., Royaumont (1959) (sous presse).

(IV) J. M. SOURIAU - "Géométrie et relativité", Hermann, Paris (1962).