ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ANDRÉ LICHNÉROWICZ

Les spineurs en relativité générale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, nº 2 (1962), p. 171-177
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_171_0>

LES SPINEURS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

André LICHNÉROWICZ
(Collège de France - Paris)

Dans cette conférence, je me propose de montrer comment les champs spinoriels peuvent être introduits en relativité générale et de développer sur un espace-temps arbitraire, la théorie du champ de Dirac.

1 - LE GROUPE SPIN (4) -

a) Considérons un espace-temps de Minkowski rapporté à un repère orthonormé et désignons par $\eta_{\alpha\beta}$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{AA} = -1$ pour $A = 1, 2, 3$) les composantes du tenseur métrique. Soit $\{\gamma_\alpha\}$ un système de quatre matrices 4×4 de Dirac à éléments complexes : $\gamma_\alpha = (\gamma_\alpha{}^a{}_b)$. Les indices grecs ou indices "tensoriels" prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, les indices latins ou indices "spinoriels" les valeurs 1, 2, 3, 4. Dire que les γ_α sont un système de matrices de Dirac, c'est dire que l'on a l'identité :

$$(V^\alpha \gamma_\alpha)^2 = -(V^\alpha V^\beta \eta_{\alpha\beta})\, e \qquad \text{(e matrice unité)} \qquad (1\text{-}1)$$

quels que soient les V^α complexes ; (1-1) peut se traduire par :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2\, \eta_{\alpha\beta} e \qquad (1\text{-}2)$$

Introduisons les matrices produits :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta \qquad (1\text{-}3)$$

où les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont supposés tous *distincts*. Les traces des matrices γ_α et des matrices (1-3) précédentes sont toutes nulles. Par suite les 16 matrices 4×4 obtenues en adjoignant à e et aux γ_α, les six matrices $\gamma_\alpha \gamma_\beta$ ($\alpha < \beta$), les quatre matrices $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$), et la matrice $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ sont *linéairement indépendantes sur les complexes* et engendrent l'espace vectoriel des matrices 4×4 à éléments complexes. On rappelle les propriétés suivantes des matrices de Dirac :

1/ *Toute matrice 4×4 qui commute avec les γ_α est de la forme "a e" où a est complexe*

2/ *Si $\{\gamma'_\alpha\}$ est un autre système de matrices vérifiant (1-2), il existe une matrice régulière Λ telle que :*

$$\gamma'_\alpha = \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}$$

Λ est définie à un facteur complexe près.

3/ *On a : dét. $(\gamma_\alpha) = 1$.*

b) Considérons maintenant *l'espace vectoriel sur les réels* ayant pour base l'ensemble des 16 matrices envisagées. D'après (1-2) tout produit de matrices γ peut s'exprimer par une combinaison linéaire à *coefficients réels* des matrices de base. Notre espace est ainsi muni d'une structure Γ d'algèbre associative qui est l'algèbre de Clifford engendrée par les γ_α. Les éléments inversibles de Γ définissent un groupe multiplicatif Γ^* qui admet une structure naturelle de groupe de Lie. *Introduisons le sous-espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de Γ sur les réels qui admet pour base les γ_α et étudions le sous-groupe fermé G de Γ^* défini par les matrices Λ vérifiant les deux conditions :*

1/ $\Lambda \mathfrak{M} \Lambda^{-1} \subset \mathfrak{M}$.

2/ dét. $(\Lambda) = 1$.

En rapportant $\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}$ à la base $\{\gamma_\alpha\}$ de $\mathfrak{M}$, on a :

$$\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \tag{1-4}$$

où $A = (A_\alpha^{\lambda'})$ est une matrice 4×4 à éléments réels. En transformant par Λ la matrice $(v^\alpha \gamma_\alpha)^2$ soit directement, soit compte-tenu de (1-1) on établit que :

$$A_\alpha^{\lambda'} A_\beta^{\mu'} \eta_{\lambda' \mu'} = \eta_{\alpha\beta}$$

Ainsi la matrice A appartient au groupe de Lorentz homogène, complet L(4) ; (1-4) définit une application $p : \Lambda \in G \longrightarrow A \in L(4)$ qui est manifestement un *homomorphisme* de G dans L(4).

c) Désignons par $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de G, par $\underline{L(4)}$ celle de L(4). De (1-4) on déduit par dérivation qu'à tout élément λ de $\underline{G}$ correspond à l'aide de p, un élément μ de $\underline{L(4)}$ qui, si $\mu^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique contravariant correspondant, est tel que :

$$\lambda \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \lambda = \mu^{\beta\alpha} \gamma_\beta \qquad (\gamma^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \gamma_\beta) \tag{1-5}$$

Pour que $\lambda \in \underline{G}$, il faut et il suffit que ce soit une solution de (1-5) pour $\mu \in L(4)$ et que sa trace soit nulle ; μ étant donné, cherchons les éléments λ correspondants par (1-5). Par produit à droite par γ_α, on obtient l'équation équivalente :

$$4\lambda + \gamma^\alpha \lambda \gamma_\alpha = - \mu^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \tag{1-6}$$

Or, de (1-2) on déduit aisément que $\gamma^\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho = 0$ si $\alpha \neq \beta$. Par suite :

$$\lambda = - \frac{1}{4} \mu^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \tag{1-7}$$

vérifie (1-6) ou (1-5), et est la seule solution de trace nulle. Ainsi, l'homomorphisme p' induit par p sur les algèbres de Lie est un *isomorphisme de $\underline{G}$ sur $\underline{L(4)}$ défini par (1-7).*

d) Le groupe de Lorentz se compose de quatre composantes connexes. Si $L_o(4)$ est la composante de l'identité de L(4), les autres composantes peuvent être obtenues par produit de $L_o(4)$ par la symétrie d'espace, par la symétrie de temps et par le produit des deux.

Soit G_o la composante connexe de l'identité de G. Du résultat concernant les algèbres de Lie, il résulte dim. $p(G_o)$ = dim. $L_o(4)$ et par suite :

$$p(G_o) = L_o(4)$$

D'autre part, $\Lambda = \gamma_o \in G$ fournit par (1-4) la symétrie d'espace et $\Lambda = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \in G$ fournit de même la symétrie de temps. Il en résulte :

$$p(G) = L(4)$$

p est donc un homomorphisme de G *sur* L(4) et son noyau est défini par les éléments commutant avec les γ_α - donc de la forme a e (a réel) - de déterminant 1. Le noyau se compose donc des deux éléments $\pm$ e qui appartiennent à G_o. Le groupe G sera appelé dans la suite Spin (4). Nous énonçons :

THEOREME - <u>Le groupe Spin(4), (resp. $Spin_o(4)$) est un revêtement d'ordre 2 du groupe de Lorentz L(4) (resp. $L_o(4)$). La projection p de Spin(4) sur L(4) est telle que si $A = (A_\alpha^{\lambda'}) = p\Lambda$ ($A \in L(4)$, $\Lambda \in$ Spin(4)), on a</u> :

$$\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \tag{1-8}$$

$p^{-1} A$ se compose des deux matrices $\pm \Lambda$ de déterminant 1 vérifiant (1-8); à p correspond un isomorphisme entre algèbres de Lie, défini par (1-5) & (1-7). $Spin_o(4)$ est simplement connexe.

2 - ESPACE FIBRE DES REPERES SPINORIELS ET SPINEURS -

a) Soit V_4 la variété espace-temps de la relativité générale. Elle est munie d'un tenseur métrique g de type hyperbolique normal et nous la rapportons exclusivement aux repères orthonormés éléments d'un fibré principal $\mathcal{E}(V_4)$ de groupe structural L(4). Pour de tels repères, la métrique s'écrit localement :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha \vartheta^\beta$$

où les ϑ^α sont quatre formes de Pfaff définissant en chaque point x d'un ouvert U de V_4 un corepère dual d'un repère orthonormé. Ainsi $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.

Si $A \in L(4)$, nous appelons *signature temporelle* ρ_A de A un nombre égal à ± 1 selon que $A^{o'}_o$ est positif ou négatif. Si $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$, sa signature temporelle ρ_Λ est la signature temporelle de $A = p\Lambda$ Une *orientation temporelle* ρ est définie sur V_4 relativement aux repères $y \in \mathcal{E}(V_4)$ par une composante $\rho_y = \pm 1$ telle que si $y' = yA$ on ait :

$$\rho_{y'} = \rho_y \rho_A$$

V_4 admet au plus deux orientations temporelles ρ et $-\rho$. Nous supposons dans la suite que V_4 admet une *orientation ordinaire* ε et *une orientation temporelle* ρ.

b) Nous avons vu que Spin(4) est un revêtement d'ordre 2 de L(4). Nous supposons V_4 telle que de $\mathcal{E}(V_4)$ on puisse déduire *par extension* un fibré principal $\mathcal{S}(V_4)$ de groupe structural Spin(4). Lorsqu'il en est ainsi un point z de $\mathcal{S}(V_4)$ est dit un *repère spinoriel* et $\mathcal{S}(V_4)$ *l'espace fibré des repères spinoriels* ; π est la projection canonique de $\mathcal{S}(V_4)$ sur V_4, p celle de $\mathcal{S}(V_4)$ sur $\mathcal{E}(V_4)$. Un tenseur de V_4 est dit rapporté à un repère spinoriel z s'il est rapporté au repère orthonormé $y = pz$.

Un *1-spineur contravariant* ψ de V_4 est une application $z \longrightarrow \psi(z)$ de $\mathcal{S}(V_4)$ dans un espace vectoriel M de matrices 1×4 à éléments complexes, telle que :

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z) \qquad \Lambda \in \mathrm{Spin}(4) \qquad (2\text{-}1)$$

Si $\psi(z) = (\psi^a)$, les ψ^a sont les *composantes* de ψ par rapport au repère spinoriel z et (2-1) s'écrit :

$$\psi^{b'} = \Lambda^{b'}_a \psi^a \qquad \Lambda = (\Lambda^{b'}_a) \qquad (2\text{-}2)$$

Un *1-spineur covariant* φ de V_4 est une application $z \longrightarrow \varphi(z)$ de $\mathcal{S}(V_4)$ dans l'espace M^* dual de M telle que :

$$\varphi(z\Lambda^{-1}) = \varphi(z)\Lambda^{-1} \qquad \Lambda \in \mathrm{Spin}(4) \qquad (2\text{-}3)$$

Si $\varphi(z) = (\varphi_a)$, les φ_a sont les *composantes* de φ par rapport à z :

$$\varphi_{b'} = \Lambda^a_{b'}\varphi_a \qquad \Lambda^{-1} = (\Lambda^a_{b'}) \qquad (2\text{-}4)$$

Les 1-spineurs contravariants engendrent un module sur l'anneau des fonctions à valeurs complexes, tandis que les 1-spineurs covariants engendrent le module dual, la forme bilinéaire fondamentale étant :

$$(\psi, \varphi) = \psi^a \varphi_a \qquad (2\text{-}5)$$

c) Nous désignons par $*$ le passage aux complexes conjugués, par T le passage d'une matrice à la matrice transposée, par $\sim$ le passage d'une matrice à la matrice adjointe. En astreignant le système des matrices de Dirac à la condition :

$$\tilde{\gamma}_\alpha = -g_{\alpha\alpha}\gamma_\alpha \qquad (2\text{-}6)$$

on démontre aisément qu'il existe une matrice β telle que pour tout $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$:

$$\tilde{\Lambda} = \rho_\Lambda \beta^{-1}\Lambda^{-1}\beta$$

où ρ_Λ est la signature temporelle de Λ. On en déduit que l'on peut définir une application antilinéaire $\mathfrak{A}$, l'*adjonction de Dirac*, du module des 1-spineurs contravariants sur le module des 1-spineurs covariants par :

$$\mathfrak{A} : \psi \longrightarrow \bar{\psi} = \rho \tilde{\psi} \beta \tag{2-7}$$

où ρ est l'orientation temporelle de V_4.

On démontre de même qu'il existe une matrice α telle que pour tout $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$:

$$\Lambda^* = \alpha^{-1} \Lambda \alpha$$

Il en résulte qu'on peut définir une application antilinéaire régulière $\mathcal{C}$, de carré l'identité, la *conjugaison de charge*, du module des 1-spineurs contravariants sur lui-même par :

$$\mathcal{C} : \psi \longrightarrow \mathcal{C}\psi = \alpha \psi^* \tag{2-8}$$

d) Par produit tensoriel de la représentation triviale et de la représentation duale de Spin(4) introduites pour définir les 1-spineurs, on obtient la définition de *spineurs de type* (p,q), p fois covariants et q fois contravariants. *L'adjonction de Dirac et la conjugaison de charge* s'étendent de manière naturelle aux spineurs de type quelconque. Elles anticommutent.

Aux représentations précédentes, nous pouvons adjoindre les représentations définies à partir de l'homomorphisme canonique de Spin(4) sur L(4). On obtient ainsi par produit tensoriel des *tenseurs-spineurs* de types variés. A l'aide de ces notions, on peut interpréter (1-8) qui peut s'écrire :

$$\gamma_{\lambda'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} \qquad\qquad A^{-1} = (A^{\alpha}_{\lambda'})$$

soit en explicitant :

$$\gamma_{\lambda'}{}^{l'}{}_{m'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \Lambda^{l'}_{a} \Lambda^{b}_{m'} \gamma_{\alpha}{}^{a}{}_{b} \qquad\qquad (\Lambda = (\Lambda^{l'}_{a}),\ \ \Lambda^{-1} = (\Lambda^{b}_{m'})) \tag{2-9}$$

(2-9) et par suite (1-8) expriment que les $\gamma_\alpha{}^a{}_b$ sont les composantes par rapport à un repère spinoriel d'un tenseur-spineur déterminé qui est tensoriel covariant et spinoriel de type (1,1). Au tenseur-spineur γ défini par les γ_α nous donnons le nom de *tenseur-spineur fondamental* de V_4.

3 - CONNEXION SPINORIELLE ET COURBURE -

a) Par définition, une connexion spinorielle est une connexion infinitésimale sur le fibré principal $\mathcal{S}(V_4)$. Une telle connexion est définie par une 1-forme σ sur $\mathcal{S}(V_4)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de Spin(4) satisfaisant les deux conditions suivantes :

1/ Si V_z est un vecteur vertical en $z \in \mathcal{S}(V_4)$, $\sigma(V_z)$ est l'élément de $\underline{Spin(4)}$ engendré par V_z quand on identifie la fibre avec le groupe Spin(4).

2/ Si $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$ et si V_z est un vecteur arbitraire en z :

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \mathrm{ad.}(\Lambda)\, \sigma(V_z)$$

Soit ω la 1-forme de la connexion riemannienne de V_4 qui est une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}(V_4)$. A ω, faisons correspondre la 1-forme σ de $\mathcal{S}(V_4)$ à valeurs dans *Spin*(4) définie par :

$$\sigma(V_z) = p'^{-1} \omega(p V_z) \tag{3-1}$$

où pV_z désigne la projection de V_z sur $\mathcal{E}(V_4)$ et p' l'isomorphisme de $\underline{Spin(4)}$ sur $\underline{L(4)}$. On vérifie immédiatement que σ définit une connexion spinorielle dite *induite* par la connexion riemannienne.

Au point $y \in \mathcal{E}(V_4)$, ω peut être définie par une matrice (ω^α_β) (ou $(\omega^{\alpha\beta})$) dont les éléments sont des formes linéaires ; σ peut être définie par la matrice :

$$\sigma = -\frac{1}{4} \omega^\alpha_\beta \gamma_\alpha \gamma^\beta \tag{3-2}$$

dont les éléments sont :

$$\sigma^a_b = -\frac{1}{4}\,\omega^\alpha_\beta\,\gamma^a_{\alpha\,r}\gamma^{\beta\,r}{}_b \tag{3-3}$$

Soit $C^\alpha_{\beta\rho}$ les coefficients de la connexion ω sur le voisinage U de V_4 muni de repères spinoriels. Les coefficients correspondants de la connexion spinorielle peuvent s'écrire :

$$\sigma^a_{b\rho} = -\frac{1}{4}\,C^\alpha_{\beta\rho}\,\gamma^a_{\alpha\,r}\gamma^{\beta\,r}{}_b \tag{3-4}$$

b) D'après la théorie générale des connexions, un 1-spineur contravariant ψ admet par différentielle absolue dans la connexion σ une 1-forme $\nabla\psi$ de type 1-spinoriel contravariant :

$$\nabla\psi = d\psi + \sigma\psi$$

De même un 1-spineur covariant admet par différentielle absolue :

$$\nabla\varphi = d\varphi - \varphi\sigma$$

Ces différentielles absolues définissent des tenseurs-spineurs, dérivées covariantes de composantes dans U :

$$\nabla_\rho\psi^a = \partial_\rho\psi^a + \sigma^a_{b\rho}\psi^b \qquad \nabla_\rho\varphi_a = \partial_\rho\varphi_a - \sigma_a{}^b{}_\rho\varphi_b$$

où ∂_ρ désigne la dérivation pfaffienne par rapport aux formes $\{\vartheta^\rho\}$. Par produit tensoriel, on obtient immédiatement l'expression des composantes de la dérivée covariante d'un tenseur-spineur arbitraire. On a le théorème suivant :

THEOREME - *Dans la connexion spinorielle induite, la différentielle absolue du tenseur-spineur fondamental* γ *est nulle.*

En effet :

$$\nabla\gamma^\alpha = d\gamma^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta\gamma^\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma$$

soit :

$$\nabla\gamma^\alpha = \omega^{\alpha\beta}\gamma_\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma = -\omega^{\beta\alpha}\gamma_\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma$$

qui est nul d'après (1-5) puisque σ est une solution de l'équation en λ lorsqu'on prend ω pour μ.

c) La courbure de la connexion spinorielle est définie par la 2-forme Π de $\mathfrak{S}(V_4)$ de type (1,1) :

$$\Pi = d\sigma + \frac{1}{2}[\sigma,\sigma]$$

Sur U; Π est donnée par la matrice d'éléments :

$$\Pi^a_b = d\sigma^a_b + \sigma^a_r\wedge\sigma^r_b \tag{3-5}$$

A Π est associé un *tenseur-spineur de courbure* **P** dont les composantes sur U sont définies par :

$$\Pi^a_b = \frac{1}{2}P^a{}_{b,\lambda\mu}\vartheta^\lambda\wedge\vartheta^\mu \qquad (P^a{}_{b,\lambda\mu} = -P^a{}_{b,\mu\lambda}) \tag{3-6}$$

On vérifie aisément que si $\Omega = (\Omega^\alpha{}_\beta)$ est la forme de courbure de la connexion riemannienne :

$$\Pi = -\frac{1}{4}\,\Omega^\alpha{}_\beta\gamma_\alpha\gamma^\beta \tag{3-7}$$

Il en résulte :

$$P^a{}_{b,\lambda\mu} = -\frac{1}{4}R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b$$

où $R^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure. Pour le tenseur-spineur de courbure, on a l'*identité de Bianchi* :

$$\nabla_\nu P^a{}_{b,\lambda\mu} + \nabla_\lambda P^a{}_{b,\mu\nu} + \nabla_\mu P^a{}_{b,\nu\lambda} = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

et l'*identité de Ricci* :

$$(\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\, \psi^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} = \sum_{i=1}^{p} P^{a_i}{}_{r,\lambda\mu}\, \psi^{a_1 \dots r \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} - \sum_{j=1}^{q} P^{r}{}_{b_j,\lambda\mu}\, \psi^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots r \dots b_q} \qquad (3\text{-}10)$$

où ψ est un spineur arbitraire.

A l'aide de propriétés du tenseur de courbure et de (1-2), on vérifie aisément les identités :

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = 2\, R^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^\beta \qquad R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = -\,2 R e \qquad (3\text{-}11)$$

où R est la courbure riemannienne scalaire.

4 - LE CHAMP DE DIRAC -

a) Soit ψ un 1-spineur contravariant, φ un 1-spineur covariant tels que l'intersection de leurs supports soit compacte. Nous posons :

$$< \psi, \varphi > = \int_{V_4} (\psi, \varphi)\, \eta \qquad (4\text{-}1)$$

où η est l'élément de volume riemannien. Nous appelons *bi-spineur de Dirac* le bi-1-spineur distribution $\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x,x')$ contravariant en x, covariant en x', défini par :

$$< \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x,x'),\, \psi(x') > = \psi(x) \qquad < \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x',x),\, \varphi(x') > = \varphi(x)$$

où φ est un 1-spineur covariant, ψ un 1-spineur contravariant.

Nous appelons *laplacien* de ψ le 1-spineur contravariant :

$$\Delta\psi = \gamma^\alpha\gamma^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\,\psi = -\,\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}\, R\,\psi \qquad (4\text{-}2)$$

d'après (3-11). De même si φ est un 1-spineur covariant :

$$\Delta\varphi = \nabla_\alpha\nabla_\beta\,\varphi\,\gamma^\beta\gamma^\alpha = -\,\nabla^\rho\nabla_\rho\varphi + \frac{1}{4}\, R\,\varphi \qquad (4\text{-}3)$$

On vérifie immédiatement que si l'intersection des supports de ψ et φ est compacte :

$$<\Delta\psi, \varphi> = <\psi, \Delta\varphi>$$

Nous appelons *noyaux élémentaires de l'opérateur de Klein-Gordon* $(\Delta - \varepsilon^2)$ (ε^2 = const.) les deux bi-1-spineurs distributions vérifiant :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(\frac{1}{2})\pm}(x,x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x,x')$$

et qui pour chaque x' ont leurs supports respectivement dans le futur ou dans le passé de x'. A la différence $G^{(\frac{1}{2})} = G^{(\frac{1}{2})-} - G^{(\frac{1}{2})+}$, je donne le nom de *propagateur spinoriel* relatif à $(\Delta - \varepsilon^2)$.

b) Introduisons sur les 1-spineurs contravariants les deux opérateurs de Dirac du 1er ordre :

$$L\psi = \gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \varepsilon\psi \qquad L'\psi = \gamma^\beta\nabla_\beta\psi + \varepsilon\psi$$

et sur les 1-spineurs covariants les deux opérateurs :

$$\overline{L}\varphi = -\,(\nabla_\alpha\varphi\,\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi) \qquad \overline{L}'\varphi = -\,(\nabla_\beta\varphi\,\gamma^\beta - \varepsilon\varphi)$$

On a immédiatement :

$$LL' = L'L = \Delta - \varepsilon^2 \qquad \overline{L}\overline{L}' = \overline{L}'\overline{L} = \Delta - \varepsilon^2$$

De plus, si l'intersection des supports de ψ et φ est compacte :

$$< L\psi, \varphi > = < \psi, \overline{L}\varphi > \qquad < L'\psi, \varphi > = < \psi, \overline{L}'\varphi >$$

Considérons le champ de Dirac $\left(\text{spin } \frac{1}{2}\right)$ en relativité générale. Il est décrit par un 1-spineur contravariant ψ astreint à l'équation du champ :

$$L\psi = 0 \tag{4-4}$$

Son adjoint de Dirac $\overline{\psi}$ vérifie :

$$\overline{L}\,\overline{\psi} = 0 \tag{4-5}$$

Si ψ est à valeurs dans un espace d'opérateurs d'un espace de Hilbert, nous sommes conduits à évaluer l'anticommutateur correspondant qui, d'après les résultats antérieurs, sera donné par la formule :

$$[\psi(x), \overline{\psi}(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(\frac{1}{2})}(x, x') \tag{4-6}$$

où :

$$S^{(\frac{1}{2})}(x, x') = L'_x G^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

vérifie (4-4) et (4-5). Notre anticommutateur est invariant par conjugaison de charge.

Des résultats analogues sont valables pour des champs spinoriels de spin plus grand (champ de Rarita-Schwinger par exemple).