

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

P. JORDAN

**Bemerkungen zur Quantenlogik**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 159-166

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1962\\_\\_8\\_2\\_159\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_159_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# BEMERKUNGEN ZUR QUANTENLOGIK

P. JORDAN  
(Hambourg)

## 1 - EINLEITUNG -

Das Thema meiner Ausführungen wird rein mathematisch sein ; jedoch handelt es sich um mathematische Überlegungen, die von der Physik aus angeregt sind. Es ist seit langer Zeit meine Überzeugung, dass der mathematische Formalismus der Quantentheorie, wie wir ihn heute haben, zu eng gefasst ist, um allen Problemen der Physik gerecht zu werden. Diese Überzeugung bedarf vielleicht heute in geringerem Mass einer Begründung, als vor 35 Jahren - die Schwierigkeiten der Quantentheorie der Wellenfelder zeigen ja, dass wir ohne gewisse Erweiterungen des Mathematischen Formalismus nicht auskommen können. Manche Verfasser hoffen, dass die Schwierigkeiten überwunden werden können, wenn man den *Hilbert*-Raum ersetzt durch einen Raum von nichtdefiniter Metrik. Aber ob das ausreichen wird, ist noch nicht zu entscheiden.

Vor 35 Jahren habe ich versucht, die augenscheinlich notwendige Verallgemeinerung der Theorie dadurch zu erzielen, dass die Algebra der Operatoren ersetzt wird durch eine Allgemeinere Algebra, in welcher die Multiplikation nicht nur das kommutative, sondern auch das assoziative Gesetz verletzt. Man kann sich in diesem Fall zurückziehen auf die Untersuchung kommutativer Multiplikation ; und man kommt zu einer mathematisch bemerkenswerten Klasse von Algebren, wenn man dann das assoziative Gesetz *abschwächt* zu dem Gesetz :

$$a(ba^2) = (ab)a^2. \quad (1)$$

Algebren, welche dieses Axiom erfüllen, habe ich seinerzeit untersucht, gemeinsam mit *J.v. Neumann* und *E. Wigner*. Wir kamen zu der Feststellung, dass sie leider keine Förderung für die Physik versprechen ; aber sie sind im rein mathematischen Sinne bemerkenswert, und ihrer weiteren Untersuchung ist deshalb - vor allem in USA - eine umfangreiche Literatur gewidmet worden.

Das wichtigste Kriterium für die Bedeutung einer mathematischen Theorie liegt ja freilich darin, dass sie *Anwendungen* in *anderen* Gebieten der Mathematik gestattet. Das schien nun bei den Algebren (1) freilich zunächst kaum der Fall zu sein. Aber neuerdings haben sich in Hamburg *E. Artin* und *Helene Braun* eingehend mit diesen Algebren beschäftigt, und es hat sich ergeben, dass sie von entscheidender Bedeutung sind für ein hochaktuelles Problem moderner mathematischer Forschung : Die Theorie der automorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Man kann deshalb vielleicht hoffen, dass auch diejenigen ganz andersartigen, obwohl ebenfalls an die Quantentheorie anknüpfenden mathematischen Untersuchungen, über die ich heute kurz berichten möchte, in Zukunft vielleicht zu wichtigen Teiben moderner Mathematik werden können - und dass sie uns auf diese Weise entschädigen werden, falls die Hoffnung, sie könnten der Physik nützen, sich als irrig erweisen sollte.

## 2 - QUANTENLOGIK -

*J.v. Neumann* und *G. Birkhoff* haben gezeigt, dass man die Quantenmechanik mathematisch in einer Weise formulieren kann, welche ganz verschieden von den gewohnten Formulierungsweisen ist. Die meisten Physiker haben dieser Untersuchung wenig Aufmerksamkeit entgegen gebracht. Denn da die neue Formulierung mathematisch *äquivalent* mit der gewohnten ist, so kann sie ja für die Anwendungszwecke der Theorie nichts Neues ergeben. Sie ist aber lehrreich in grundsätzlichem Sinne ; und wenn man glaubt, dass es nötig sei, nach Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Quantenmechanik zu suchen, so liegt es nahe, zu prüfen, ob die *Neumann-Birkhoffsche* Formulierung vielleicht Anregungen für Verallgemeinerungen ergibt.

Zunächst muss ich die *Neumann-Birkhoffschen* Überlegungen kurz erläutern.

Als *Verband* bezeichnen wir eine Menge von Elementen  $a, b, c, \dots$ , für welche zwei assoziative und kommutative Verknüpfungen definiert sind, durch die Zeichen  $\cap, \cup$  bezeichnet. Dabei soll das weitere Axiom :

$$a \cap (b \cup a) = (a \cap b) \cup a = a \quad (2)$$

gelten, aus welchem man die zweifache *Idempotenz*

$$a \cap a = a \cup a = a \quad (3)$$

ableitet.

Eine engere Klasse von Verbänden sind diejenigen, welche das *Distributivgesetz*

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \quad (4)$$

erfüllen, welches gleichwertig mit dem dazu *dualen* Axiom :

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \quad (5)$$

ist.

Eine Folgerung aus (4) bzw. (5) ist das *Modulargesetz*

$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) = (a \cap b) \cup [c \cap (a \cup b)], \quad (6)$$

welches, als Axiom angenommen, *schwächer* als das Distributivgesetz ist.

Die Beziehung dieser Begriffe zur Physik ergibt sich nach *Neumann-Birkhoff* folgendermassen. Ist an einem *klassischen* physikalischen System  $\Sigma$  eine *Messung* gemacht, so kann ihr Ergebnis so ausgedrückt werden : Im Phasenraum des Systems  $\Sigma$  befindet sich der Punkt, welcher den Zustand von  $\Sigma$  angibt, in einer gewissen Teilmenge  $a$  der Punkte des Phasenraums.

Sind nun *zwei* solche Aussagen  $a, b$  gemacht, so ist ihrer *logischen* Verknüpfung zu "*beide* Aussagen sind richtig" der *Durchschnitt*  $a \cap b$  der beiden Punktmengen  $a, b$  zugeordnet ; und ihrer Verknüpfung zu "*mindestens* eine der Aussagen ist richtig" entspricht die *Vereinigungsmenge*  $a \cup b$ . Die Teilmengen einer Menge bilden aber, wenn sie zum Durchschnitt und zur Vereinigungsmenge verknüpft werden, einen *distributiven Verband*. Also auch die *Aussagen* über Messungsergebnisse an einem klassisch-physikalischen System  $\Sigma$  bilden einen distributiven Verband, im Sinne der schon von *Boole* entwickelten Aussagen-Logik.

Ist nun aber  $\Sigma$  ein *quantenmechanisches* System, so ist ein Messresultat so zu beschreiben, dass die Wellenfunktion von  $\Sigma$  innerhalb eines gewissen *linearen Unterraums* des *Hilbert-Raums* liegt. Wenn wir nun Aussagen dieser Form verknüpfen wollen - ähnlich, wie die klassische Physik eine logische Verknüpfung von Aussagen im Sinne der *Booleschen* Logik-Algebra erlaubt - so können wir neben dem *Durchschnitt*  $a \cap b$  zweier linearer Unterräume nur den von zwei Unterräumen  $a, b$  *aufgespannten* (oder *erzeugten*) linearen Unterraum  $a \cup b$  heran ziehen.

Die linearen Unterräume des *Hilbert-Raumes* bilden für diese beiden Verknüpfungen  $\cap, \cup$  offenbar einen *Verband* ; aber dieser ist *nicht mehr distributiv*. Er ist jedoch "*beinah*" *modular*. Das Wort "*beinah*" weist darauf hin, dass hier ein Schönheitsfehler vorliegt : Würden wir statt des *Hilbert-Raums* einen linearen Vektorraum *endlicher Dimension* betrachten, so kämen wir in der Tat auf einen *modularen Verband*. Im *Hilbert-Raum* handelt es sich nicht genau um einen modularen Verband, sondern um einen solchen, der gewissermassen nur geringfügige Abweichungen vom modularen Verhalten zeigt : Da diese Abweichungen einen etwas "*pathologischen*" Charakter haben, so hat J. v. Neumann eine neuartige Geometrie konstruiert, in welcher die linearen Unterräume Dimensionen haben, welche nicht mehr ganzzahlig, sondern *reelle Zahlen* sind ; dabei gilt das *Modular-gesetz* lückenlos.

Beschränken wir uns, zwecks Vermeidung von Komplikationen, die uns jetzt nicht förderlich sind, auf Vektorräume endlicher Dimension, so kommen wir zu folgender Sachlage :

*Die logische Verknüpfung quantenmechanischer Aussagen ergibt einen Verband, der im Gegensatz zur klassischen Physik nicht mehr distributiv, sondern nur noch modular ist.*

Wenn wir nun, um auf unsere schon erläuterte Absicht zurück zu kommen, diese "*Quantenlogik*" zum Ausgangspunkt einer *Verallgemeinerung* machen wollen, so bietet sich der Gedanke an, hier noch

einmal einen analogen Schritt zu versuchen, wie seinerzeit beim Übergang von der kommutativen Algebra klassischer physikalischer Grössen zur nichtkommutativen Algebra der quantenmechanischen Operatoren. Wir wollen also die mathematische Theorie der Verbände verallgemeinern durch Verzicht auf das kommutative Gesetz.

Bei aufstellung der Quantenmechanik war die mathematische Theorie der Matrizen und Operatoren bereits vorhanden. Aber die Theorie nichtkommutativ verallgemeinerter Verbände muss erst noch geschaffen werden. Nur vorbereitende Feststellungen in dieser Richtung sind bislang gelungen.

### 3 - SCHRAGVERBANDE -

Wir wollen uns nun etwas unterrichten über die mathematischen Gesetzmässigkeiten einer nichtkommutativen Verallgemeinerung der Theorie der Verbände.

Die Grundaxiome sind : Es gibt zwei *assoziative*, aber im allgemeinen Falle nicht mehr kommutative Verknüpfungen, für welche wir zunächst die Zeichen  $\vee$ ,  $\wedge$  gebrauchen wollen. Diese erfüllen die beiden Axiome :

$$a_{\wedge}(b_{\vee}a) = (a_{\wedge}b)_{\vee}a = a. \quad (7)$$

Es folgt dann auch im nichtkommutativen Fall, dass :

$$a_{\wedge}a = a_{\vee}a = a \quad (8)$$

ist, sodass die Elemente eines "Schrägverbandes" (skew lattice) in *zweifacher* Weise eine *Halbgruppe von Idempotenten* bilden.

Zwei verschiedene Eigenschaften dieser Axiome sind beachtenswert : 1) Es besteht eine *duale Symmetrie* : Das Axiom (7) - und ebenso natürlich auch dasjenige der Assoziativität - bleibt erhalten, wenn man einerseits die Zeichen  $\wedge$ ,  $\vee$  *vertauscht*, andererseits alle mit ihnen gebildeten Ausdrücke *rückwärts liest*. Wir wollen diese Dualsymmetrie für den weiteren Aufbau der Theorie aufrecht erhalten - wenn wir durch zusätzliche Axiome engere Klassen von Schrägverbänden definieren, wollen wir diese Axiome stets so wählen, dass sie ebenfalls dualsymmetrisch sind. 2) Unsere Axiome werden insbesondere stets dann erfüllt, wenn man festsetzt : Es soll stets :

$$a_{\wedge}b = a \quad (9)$$

gelten ; und hinsichtlich der Verknüpfung  $\vee$  sollen die Elemente eine *beliebige* Halbgruppe von Idempotenten sein. Oder dual umgekehrt : Es soll stets :

$$b_{\vee}a = a \quad (10)$$

gelten, und bezüglich der Komposition  $\wedge$  sollen die Elemente eine *beliebige* Halbgruppe von Idempotenten sein.

Wir wollen eine Elementenmenge, welche *eine* der beiden Beziehungen (9), (10) erfüllt, ein "*Halbnest*" nennen. (Gelten sogar *beide* Beziehungen so sprechen wir von einem *Nest*). Die unter 2) hervorgehobene Eigenschaft der grundlegenden Axiome wollen wir so benennen, dass wir sagen : Diese Axiome sind "*halbnestgerecht*". Die meisten der hernach zu besprechenden Zusatzaxiome, welche engere Klassen von Schrägverbänden definieren, werden halbnestgerecht sein.

Jedoch sind folgende Zusatzaxiome (11), (12), durch welche wichtige Klassen von Schrägverbänden definiert werden, *nicht* halbnestgerecht : Als *glatt* bezeichnen wir einen Schrägverband, wenn in ihm stets :

$$\begin{cases} a_{\wedge}b_{\wedge}a = a_{\wedge}b, \\ a_{\vee}b_{\vee}a = b_{\vee}a \end{cases} \quad (11)$$

ist. Als *überglatt* bezeichnen wir ihn, wenn sogar :

$$\begin{cases} a_{\wedge}b_{\wedge}c = a_{\wedge}c_{\wedge}b \\ a_{\vee}b_{\vee}c = b_{\vee}a_{\vee}c \end{cases} \quad (12)$$

gilt. - Wir werden diese Bezeichnungen "glatt" und "überglatt" auch auf blosse Halbgruppen von Idempotenten anwenden.

Folgende zwei Beispiele  $W_u$  und  $W_u^*$  von Schrägverbänden sind lehrreich :

Tabelle 1 : Schrägverband  $W_u$ .

$$\begin{array}{l|l} 0_{\wedge}x = 0 & x_{\vee}1 = 1 \\ u_{\wedge}x = u & x_{\vee}u = u \\ v_{\wedge}x = v & x_{\vee}v = v \\ 1_{\wedge}x = x & x_{\vee}0 = x. \end{array}$$

Tabelle 2 : Schrägverband  $W_u^*$ .

$$\begin{array}{l|l} x_{\wedge}0 = 0 & 1_{\vee}x = 1 \\ x_{\wedge}\xi = x & \xi_{\vee}x = x \\ x_{\wedge}\eta = x & \eta_{\vee}x = x \\ x_{\wedge}1 = x & 0_{\vee}x = x. \end{array}$$

In jeder dieser beiden Tabellen bedeutet x ein *beliebiges* Element des betreffenden Schrägverbandes.

Dies sind, wie man leicht bestätigt, in der Tat zwei Schrägverbände.  $W_u$  ist glatt, aber nicht überglatt.  $W_u^*$  ist sogar überglatt, aber nicht kommutativ.

Ferner haben  $W_u$  und  $W_u^*$  die bemerkenswerte Eigenschaft, dass in ihnen jedes *Elementenpaar* einen *Unter-Schrägverband* bildet. Im kommutativen Fall nennt man einen Verband "gestreckt" (oder "geordnet"), wenn er diese Eigenschaft hat, dass jedes der Elemente  $a_{\wedge}b$ ,  $a_{\vee}b$  gleich a oder b ist.

Definition - Ein Schrägverband heisst *gestreckt*, wenn jedes seiner *Elementenpaare* einen *Unter-Schrägverband* bildet.

Also sind  $W_u$ ,  $W_u^*$  gestreckte Schrägverbände.

In der kommutativen Theorie sind die gestreckten Verbände, definiert durch eine *geordnete* Menge von Elementen a, b und die Festsetzung.

$$a_{\wedge}b = \text{Min}(a, b) ; a_{\vee}b = \text{Max}(a, b), \quad (13)$$

eine besonders einfache Klasse von Verbänden ; insbesondere sind sie modular und sogar distributiv. Deshalb scheint es sinngemäss, auch im nichtkommutativen Fall die Begriffe "modular" und "distributiv" so zu definieren, dass *alle* gestreckten Schrägverbände modular und distributiv sind.

Wir wollen auch eine *Halbgruppe* mit der Eigenschaft, dass jedes ihrer *Elementenpaare* eine Unterhalbgruppe bildet, als *gestreckt* bezeichnen.

#### 4 - DOPPELT DISTRIBUTIVE SCHRAGVERBANDE -

Wir wollen ab jetzt die Zeichen  $\vee$ ,  $\wedge$  ersetzen durch die Zeichen +, . von Addition und Multiplikation ; also sieht das Axiom (7) jetzt so aus :

$$a(b + a) = ab + a = a. \quad (14)$$

Es würde naheliegen, das Distributivaxiom der kommutativen Theorie derart für den nichtkommutativen Fall zu verallgemeinern, dass man entweder.

$$(D_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(b + c) = ab + ac, \\ cb + a = (c + a)(b + a), \end{array} \right. \quad (15)$$

oder statt dessen :

$$(D_2) \quad \begin{cases} (a + b)c = ac + bc, \\ c + ba = (c + b)(c + a) \end{cases} \quad (16)$$

verlangen würde.

Diese beiden Axiome  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  haben aber *nicht* die Eigenschaft, in allen gestreckten Schrägverbänden erfüllt zu sein. Denn in  $W_4$  gilt zwar  $(D_1)$ , aber nicht  $(D_2)$ ; und in  $W_4^*$  gilt  $(D_2)$ , aber nicht  $(D_1)$ .

Beachtenswert ist aber trotzdem die Klasse derjenigen Schrägverbände, in welchen *beide* Axiome  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  gelten. Wir wollen sie als *doppelt distributiv* bezeichnen. Offenbar haben sie die Eigenschaft, dass ein durch Elemente  $a, b, c, \dots$  erzeugter Schrägverband, wenn er doppelt distributiv ist, nur aus solchen Elementen besteht, welche Summen von Produkten der erzeugenden Elemente sind.

Beispielsweise wollen wir den *freien* glatten doppeltdistributiven Schrägverband mit zwei Erzeugenden  $a, b$  betrachten. Die durch  $a, b$  erzeugte multiplikative Halbgruppe besteht aus den Elementen  $a, b, ab, ba$ . Sie ist nicht nur glatt, sondern auch überglatt. Dann folgt aber aus dem doppelten Distributivitätsgesetz, dass *sämtliche* Elemente des von  $a, b$  erzeugten Schrägverbandes eine überglatte multiplikative Halbgruppe bilden. Aus Dualitätsgründen bilden sie dann auch *additiv* eine überglatte Halbgruppe; sodass wir also einen überglatten Schrägverband haben. Danach ist es leicht, die in Frage kommenden Elemente vollständig aufzuschreiben. Nur folgende 18 Polynome können voneinander verschieden sein:

Tabelle 3 : Schrägverband  $W_{18}$ .

$\zeta_1 = a$		$\vartheta_1 = b$
$\zeta_2 = ab$		$\vartheta_2 = ba$
$\zeta_3 = b + a$		$\vartheta_3 = a + b$
$\zeta_4 = ba + a$		$\vartheta_4 = ab + b$
$\zeta_5 = a + ab$		$\vartheta_5 = b + ba$
$\zeta_6 = b + ab$		$\vartheta_6 = a + ba$
$\zeta_7 = ba + ab$		$\vartheta_7 = ab + ba$
$\zeta_8 = a + b + ab$		$\vartheta_8 = b + a + ba$
$\zeta_9 = a + ba + ab$		$\vartheta_9 = b + ab + ba.$

Dass diese 18 Elemente wirklich verschieden sein können, also im *freien* Fall verschieden sind, ergibt sich daraus, dass man aus einem direkten Produkt von direkten Faktoren  $W_4$  (oder statt dessen auch von direkten Faktoren  $W_4^*$ ) einen doppelt distributiven Unterschrägverband aussondern kann, welcher durch zwei Elemente  $a, b$  erzeugt wird, und welcher, wie man leicht bestätigen kann, 18 verschiedene Elemente enthält. In unmittelbar verständlicher Bezeichnungsweise schreiben wir:

$$\begin{cases} a = (u|u0u1|01), \\ b = (v|0u1u|10). \end{cases} \quad (17)$$

Man kann diese Ermittlung ausdehnen auf den *nichtglatten* Fall. Dann gilt freilich nicht mehr (12), sondern die schwächere Beziehung:

$$\begin{cases} abcd = acbd, \\ a + b + c + d = a + c + b + d. \end{cases} \quad (18)$$

Es ergibt sich ein Schrägverband  $W_{50}$  von insgesamt 50 Elementen, der eine ähnliche Darstellung wie in (17) erlaubt.

## 5 - MODULARE SCHRAGVERBANDE -

Das Modulargesetz (6) der kommutativen Theorie kann natürlich in mannigfach verschiedener Weise auf den nichtkommutativen Fall ausgedehnt werden. Wenn wir uns aber beschränken wollen

auf solche Modulargesetze, welche insbesondere in jedem gestreckten Schrägverband gelten, so haben wir folgende zwei Axiome (M), (M\*) zu betrachten :

Das Modulargesetz :

$$(M) \quad (ab + c) (a + b) = ab + c(a + b) \quad (19)$$

ist dualsymmetrisch. Gilt sogar (D<sub>2</sub>), so ergibt sich (M) als Folgerung.

Man kann (M) auch in folgender Form ausdrücken : *Aus* :

$$\begin{cases} xy = x, \\ x + y = y \end{cases} \quad (20)$$

folgt

$$(x + c)y = x + cy. \quad (21)$$

Das andere Modulargesetz :

$$(M^*) \quad \begin{cases} a(ab + c) = ab + ac, \\ c(b + a) + a = (c + a) (b + a) \end{cases} \quad (22)$$

besteht aus zwei zu einander dualen Gleichungen.

Wir fragen nach dem *freien* modularen, d.h. beide Axiome (M), (M\*) erfüllenden, und glatten Schrägverband mit zwei Erzeugenden a,b. Das Ergebnis ist : Es handelt sich um den schon oben besprochenen Schrägverband W<sub>18</sub>.

Der Beweis hierfür ist allerdings mühsam ; die weitergehende Frage, ob im *nichtglatten* Fall der freie modulare Schrägverband mit zwei Erzeugenden vielleicht der oben erwähnte W<sub>50</sub> ist, wurde deshalb noch nicht untersucht.

Wenn ein Schrägverband mindestens eines der Distributivgesetze (D<sub>1</sub>), (D<sub>2</sub>) erfüllt, so erfüllt, er auch (M\*).

Ein Beispiel der durch die Nichtkommutativität gegebenen neuartigen strukturellen Möglichkeiten ist folgendes : Es gibt auch solche Schrägverbände ("supermodulare" Schrägverbände), in denen (21) für jedes Elementetripel x,y,c gilt, *unabhängig* von (20). Insbesondere gibt es im obigen W<sub>18</sub> einen Kongruenzklassen-Schrägverband W<sub>8</sub>, welcher supermodular ist und 8 Elemente enthält. Er ist erzeugbar durch zwei gewisse Elemente a,b aus dem direkten Produkt von 5 direkten Faktoren W<sub>4</sub> ; in Analogie zu (17) können wir dafür schreiben :

$$\begin{cases} a = (u|u0u1), \\ b = (v|0u1u). \end{cases} \quad (23)$$

## 6 - DISTRIBUTIVE SCHRAGVERBANDE -

Folgende zwei Distributivgesetze (D), (D\*) - jedes aus zwei zueinander dualen Gleichungen bestehend - gelten in *jedem* gestreckten Schrägverband :

$$(D) \quad \begin{cases} a(b + c) = a(b + ac), \\ cb + a = (c + a) b + a. \end{cases} \quad (24)$$

$$(D^*) \quad \begin{cases} (ba + c) a = (b + c) a + ca, \\ a + c(a + b) = (a + c) (a + cb). \end{cases} \quad (25)$$

Die Bezeichnung dieser Axiome (D), (D\*) als "Distributivgesetze" ist sinngemäss, weil :

a) jede der vier Zeilen (24), (25) im *kommutativen* Fall dem gewohnten Distributivgesetz gleichwertig wird ;

b) *jedes* der beiden schärferen Distributivgesetze (D<sub>1</sub>), (D<sub>2</sub>) das Gesetz (D) als Folgerung nach sich zieht, während (D<sub>2</sub>) außerdem (D\*) bedingt.

Es liegt nun nahe, den Begriff der *distributiven* Schrägverbände - der weiter gefasst sein muss, als derjenige der *doppelt distributiven* - so zu definieren, dass sowohl die Modulargesetze (M), (M\*), als auch die Distributivgesetze (D), (D\*) als Axiome zugrunde gelegt werden.

Für die Frage, ob diese Definition sinngemäss ist, wird man durch folgende Erwägung ein Kriterium zu gewinnen hoffen. In der kommutativen Theorie gilt der Satz, dass jeder distributive Verband ein Unter-Verband eines direkten Produktes von direkten Faktoren  $V_2$  ist, wo  $V_2$  der Verband mit nur 2 Elementen ist. ( $V_2$  ist also ein *gestreckter* Verband).

Es liegt nahe, zu fragen, ob folgende Verallgemeinerung richtig ist :

"Jeder distributive Schrägverband ist Unter-Schrägverband eines direkten Produktes von *gestreckten* Schrägverbänden".

Die Antwort auf diese Frage ist jedoch noch nicht bekannt ; nur speziellere Folgerungen dieser Behauptung sind bislang als richtig erwiesen.

Die Axiome (M), (M\*), (D), (D\*) sind durchweg halbnestgerecht. Daher ist in der obigen Behauptung auch folgende speziellere Behauptung enthalten :

"Jede Halbgruppe von Idempotenten ist Unter-Halbgruppe eines direkten Produktes von *gestreckten* Halbgruppen".

Zu dieser spezielleren Behauptung ist zu sagen : Sie ist richtig für alle diejenigen Halbgruppen von Idempotenten, in welchen die Beziehung :

$$axaya = axya \quad (26)$$

gilt. (Der Beweis hierfür ist umständlich und noch nicht veröffentlicht). Da andererseits *jede* gestreckte Halbgruppe von Idempotenten (26) erfüllt, so sind die Halbgruppen mit (26) genau diejenigen, welche durch gestreckte Halbgruppen darstellbar sind.

Nicht entschieden ist die Frage, ob (26) in *jeder* Halbgruppe von Idempotenten gilt, oder nur in einer engeren Klasse solcher Halbgruppen. Green und Rees (1) haben durch scharfsinnige Überlegungen bewiesen, dass die *freie* Halbgruppe von Idempotenten, mit  $n$  Erzeugenden, eine endliche Zahl  $f(n)$  von Elementen hat. Sie haben insbesondere  $f(3) = 159$  abgeleitet.

Wenn aber (26) allgemeingültig ist, muss  $f(3) = 51$  sein. Nun zeigt eine kritische Betrachtung der Arbeit von Green und Rees, dass in Wahrheit nur  $f(3) \leq 159$  bewiesen ist. Es bleibt also noch unentschieden, ob  $f(3) = 51$  oder  $> 51$  ist. Im letzteren Falle müsste obige Behauptung noch mit der ausdrücklichen Voraussetzung (26) versehen werden.

## 7 - WEITERE PROBLEME -

Durch J.v. Neumann und G. Birkhoff ist gezeigt worden, dass man tatsächlich von der Theorie modularer Verbände aus zur Quantenmechanik kommen kann - man muss noch ergänzend die logische Operation der *Verneinung* in die Quantenlogik einführen, und erhält dann den (endlich dimensional, oder aber kontinuierlich dimensional) Vektorraum für ein quantenmechanisches System  $\Sigma$ .

Für die nichtkommutative Theorie müssten analoge Überlegungen durchgeführt werden. Da jedoch schon die vollständige Bestimmung der *distributiven* Schrägverbände ein schwieriges, nur teilweise gelöstes Problem ist, so wird die ausführlichere Theorie der *modularen* Schrägverbände erst recht noch erhebliche Anstrengungen erfordern.

## DISCUSSION

Mr. LICHNEROWICZ - Pour les W-Treillis satisfaisant à vos axiomes (M, M\*) et (D, D\*), l'axiome H est-il une condition nécessaire aussi bien que suffisante ?

Mr. JORDAN - Yes, if it is an axiom and not a theorem.

-----

(1) I. A. Green, D. Rees, Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 35 (1952).

Mr. MERCIER - You refused to give the reasons why you think it important to develop these skew lattice-theories for the elaboration of a kind of super-quantum theory. However, I should like to know if your concealed reason is approximately the following one : Do you think it more important to look for such logico-algebraic generalizations than to try to fulfill conditions of invariance of geometrical nature like the ones discussed by Pr. Géhéniau in connection with the physics of fundamental particles ?

In other words : is it more important to look for super-rules of super-super-quantization rather than to look for invariance with ordinary quantization rules ?

Mr. JORDAN - Ideas operating with the mathematical tools used hitherto in quantum theory cannot succeed without generalising, at first, the mathematical frame of the present theory.

Mr. BERNAYS - Dans l'axiomatique de la théorie des treillis, il y a à côté de la notion d'égalité " $=$ " la notion d'inclusion " $\leq$ " qui est à beaucoup d'égards élégante (par exemple la loi de distributivité peut s'écrire :

$$(a \cup b) \cap c \leq a \cup (b \cap c)$$

Peut-on étendre ce procédé d'axiomatisation à des cas plus généraux ?

M. JORDAN - Oui peut-être mais il y a la difficulté suivante : en général, nous n'avons pas une seule relation réflexive et transitive  $a \leq b$  vérifiée par certains couples d'éléments, mais il y a quatre sortes de telles relations à considérer qui sont :

$$\begin{array}{ll} b \cap a = a & b \cup a = b \\ a \cup b = b & a \cap b = a \end{array}$$

et en général ces quatre relations ont des significations différentes.