ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. GHIZZETTI

Les formules de quadrature sur les intervalles infinis

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 109-115

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_109_0>

LES FORMULES DE QUADRATURE SUR LES INTERVALLES INFINIS

A. GHIZZETTI
Professeur à l'Université de Rome,
Directeur de l'Institut National pour les Applications du Calcul de Rome

$\boxed{1}$ - Avant de traiter le problème des formules de quadrature sur les intervalles *infinis*, je dois exposer un résultat sur les formules relatives aux intervalles *finis* (voir [1]).

Soit (a,b) un intervalle fini, n un nombre entier positif, $u(x)$ une fonction dont la dérivée d'ordre $n-1$ est absolument continue dans (a,b) $[u(x) \in AC^{n-1}]$, $g(x)$ une fonction sommable sur (a,b) $[g(x) \in L]$.

L'intégrale à calculer sera écrite sous la forme :

$$\int_a^b u(x)\, g(x)\, dx \tag{1,1}$$

et la fonction $g(x)$ sera appelée le *poids*.

Fixons dans (a,b) un certain nombre m de points $x_1, x_2, \dots, x_m$, avec :

$$x_o = a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_m \leqslant b = x_{m+1}, \tag{1,2}$$

et un opérateur différentiel linéaire d'ordre n :

$$E = \sum_{h=o}^{n} a_h(x) \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}}, \quad [a_o(x) \equiv 1, \; a_h(x) \in C^{n-h}]. \tag{1,3}$$

On appellera formule de quadrature, pour l'intégrale (1,1), *relative aux points* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *et à l'opérateur* E, une formule du type suivant :

$$\int_a^b ugdx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=o}^{n-1} A_{ih} u^{(h)}(x_i) + R(u), \tag{1,4}$$

où les coefficients A_{ih} sont indépendants de $u(x)$ et le *reste* $R(u)$ est nul si $u(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle linéaire homogène $E(u) = 0$:

$$E(u) = 0 \Longrightarrow R(u) = 0. \tag{1,5}$$

On peut donner immédiatement un procédé pour construire une formule du type (1,4) sous la condition (1,5). L'opérateur E admet un *opérateur adjoint* :

$$E^* = \sum_{h=o}^{n} (-1)^{n-h} \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}} a_h(x) \tag{1,6}$$

et pour deux fonctions $u(x)$, $v(x) \in AC^{n-1}$ est valable presque partout *l'identité de Green Lagrange* :

$$v\,E(u) - u\,E^*(v) = \frac{d}{dx} \sum_{h=o}^{n-1} u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v), \; \left[E^*_k = \sum_{h=o}^{k} (-1)^{k-h} \frac{d^{k-h}}{dx^{k-h}} a_h(x) \right]. \tag{1,7}$$

Considérons l'équation différentielle linéaire non homogène :

$$E^*(v) = g \tag{1,8}$$

et soient :

$$v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \tag{1,9}$$

m-1 intégrales distinctes de (1,8). De plus dénotons par v_0 l'intégrale de (1,8) qui est définie par les conditions initiales nulles au point a :

$$v_0^{(h)}(a) = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1), \tag{1,10}$$

et par v_m l'intégrale de (1,8) qui est définie par les conditions initiales nulles au point b :

$$v_m^{(h)}(b) = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1). \tag{1,11}$$

Si dans l'identité (1,7) on pose $v = v_i$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ et on intègre sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}), on obtient [en rappelant que $E^*(v_i) = g$] :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} ugdx = -\sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx, \quad (i = 0, 1, \dots, m). \tag{1,12}$$

En faisant la somme de ces formules (1,12), on trouve :

$$\int_a^b ugdx = -\sum_{i=0}^{m}\sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx. \tag{1,13}$$

On voit aisément, en vertu de (1,10), (1,11) qui entrainent $[E^*_{n-h-1}(v_0)]_{x=x_0} = 0$, $[E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=x_{m+1}} = 0$, que la formule (1,13) peut s'écrire :

$$\int_a^b ug\, dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=0}^{n-1} [E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}\, u^{(h)}(x_i) + \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx. \tag{1,14}$$

Nous avons bien obtenu une formule de quadrature du type (1,4), avec :

$$A_{ih} = [E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}, \tag{1,15}$$

$$R(u) = \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx, \tag{1,16}$$

et la condition (1,5) est évidemment remplie.

Réciproquement on peut démontrer que ce procédé est le plus général. A chaque formule (1,4), sous la condition (1,5), on peut faire correspondre univoquement m-1 intégrales $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ de l'équation (1,8) de sorte que les coefficients A_{ih} et le reste $R(u)$ peuvent s'exprimer au moyen des formules (1,15), (1,16). La démonstration est semblable à celle qui sera exposée au paragraphe 2 pour les formules de quadrature sur les intervalles infinis.

Pour d'autres renseignements sur la formule (1,4), qui comprend toutes les formules de quadrature connues, on renvoie aux travaux [1], [2], [3].

2 - Traitons maintenant le cas des formules de quadrature sur les intervalles infinis, par exemple $(a, +\infty)$. Supposons $u(x) \in AC^{n-1}$, $g(x)$ *localement sommable* sur $(a, +\infty)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} ugdx$ *simplement convergente* $\left(\text{c'est-à-dire} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b ug\, dx\right)$; cette dernière hypothèse sera dénotée par :

$$ug \in I. \tag{2,1}$$

Fixons des points $x_1, x_2, \dots, x_m$ tels que :

$$x_0 = a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_m < +\infty = x_{m+1}{}^{(1)} \tag{2,2}$$

et un opérateur E. Proposons nous de construire une formule de quadrature du même type que (1,4) :

----

(1) On verra ensuite (§. 3) qu'on peut aussi supposer $x_m = +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} ug\,dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=0}^{n-1} A_{ih}\,u^{(h)}(x_i) + R(u), \tag{2,3}$$

toujours avec la condition :

$$E(u) = 0 \Longrightarrow R(u) = 0. \tag{2,4}$$

Si $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est un système d'intégrales linéairement indépendantes de $E(u) = 0$, il est évident que la condition (2,4) a un sens pourvu que l'hypothèse :

$$y_i\, g \in I, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2,5}$$

soit valable.

Cela posé, pour chaque point $b > x_m$ nous pouvons faire le même calcul qui a été fait au §. 1 pour atteindre la formule (1,13). Il suffit de considérer $m+1$ intégrales $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_m$ de l'équation différentielle (1,8) (la première v_0 définie par les conditions initiales (1,10) et les autres $v_1, \dots, v_{m-1}, v_m$ arbitraires), d'écrire les formules (1,12) pour les intervalles (x_0, x_1), $(x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, x_m)$, (x_m, b) et d'en faire la somme. On obtient le résultat suivant :

$$\int_a^b ug\,dx = -\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x_m}^{b} +$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\,E(u)\,dx + \int_{x_m}^{b} v_m\,E(u)\,dx, \tag{2,6}$$

qui pourra évidemment donner une formule du type (2,3) s'il est possible de choisir l'intégrale v_m de sorte que :

$$\lim_{b\to+\infty}\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=b} = 0, \quad v_m\,E(u) \in I. \tag{2,7}$$

On peut construire des exemples (voir [4]) qui démontrent que les hypothèses (2,1), (2,5) ne sont pas suffisantes à assurer la validité de (2,7). Il faut faire quelques hypothèses ultérieures. Elles sont suggérées par la condition $v_m\,E(u) \in I$, en considérant que v_m (intégrale de $E^*(v) = g$) est la somme d'une intégrale particulière de la même équation et d'une combinaison linéaire des intégrales $z_1, z_2, \dots, z_n$ de l'équation $E^*(v) = 0$. Cela nous induit à faire les hypothèses :

$$z_i\,E(u) \in I, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2,8}$$

Des exemples convenables démontrent que les trois hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) sont indépendantes (voir [4]) ; elles sont aussi suffisantes à assurer la validité de (2,7), ce qui est une conséquence du lemme suivant :

LEMME - Si les fonctions $u(x)$, $g(x)$ vérifient les hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) et si $v(x)$ est une intégrale quelconque de l'équation différentielle $E^*(v) = g$, on peut affirmer que :

A) *pour* $x \to +\infty$, *la fonction :*

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v) \tag{2,9}$$

tend vers une limite finie l ;

B) *on a :*

$$v\,E(u) \in I\ ; \tag{2,10}$$

C) *on peut choisir l'intégrale* v *de façon qu'il résulte* $l = 0$ *(quel que soit la fonction* u*).*

Nous donnons en abrégé la démonstration de ce lemme. Il faut rappeler d'abord que, si $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont des intégrales indépendantes de $E(u) = 0$, les fonctions $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ définies par le système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^{(h)} z_i = \delta_{h,n-1}, \qquad (h = 0, 1, \dots, n-1), \tag{2,11}$$

sont des intégrales indépendantes de l'équation adjointe $E^*(v) = 0$ et que ces intégrales vérifient aussi les équations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^{(h)} E^*_{n-k-1}(z_i) = \delta_{hk}, \qquad (h, k = 0, 1, \dots, n-1). \tag{2,12}$$

Il est facile (voir [4]) d'en tirer les conséquences :

$$\sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} E^*_{n-h-1}(z_j) = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n). \tag{2,13}$$

De plus, les intégrales générales des équations différentielles :

$$E(u) = f(x) \qquad E^*(v) = g(x) \tag{2,14}$$

peuvent s'exprimer par les formules (où α_i, β_i sont des constantes arbitraires) :

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right], \\ v(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \left[\beta_i - \int_a^b y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right], \end{cases} \tag{2,15}$$

qui entrainent les suivantes :

$$\begin{cases} u^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)}(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right], \\ E^*_{n-h-1}(v) = \sum_{i=1}^{n} E^*_{n-h-1}(z_i) \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right]. \end{cases} \tag{2,16}$$

Alors, en posant $E(u) = f$, de (2,9) et (2,16) on peut déduire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)}(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right] \sum_{j=1}^{n} E^*_{n-h-1}(z_j) \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right] \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right] \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)}(x)\, E^*_{n-h-1}(z_j) \end{aligned} \tag{2,17}$$

et ensuite, en vertu de (2,13) :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right] \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right]. \tag{2,18}$$

En rappelant les hypothèses (2,5) et (2,8), on tire de (2,18) :

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \int_a^{+\infty} z_i(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right] \left[\beta_i - \int_a^{+\infty} y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right], \tag{2,19}$$

ce qui prouve l'affirmation A) du lemme.

L'affirmation B) est une conséquence immédiate de l'identité (1,7), écrite sous la forme $v\, E(u) = ug + \varphi'(x)$, en tenant compte de l'hypothèse (2,1) et de A).

Enfin, la limite (2,19) sera nulle (quel que soit u, c'est-à-dire pour des α_i arbitraires) si on donne aux constantes β_i les valeurs $\beta_i = \int_a^{+\infty} y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$, ce qui équivaut à considérer comme intégrale v de $E^*(v) = g$ l'intégrale suivante :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \int_x^{+\infty} y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{2,20}$$

Le lemme étant démontré, reprenons maintenant la formule (2,6) en y posant $v_m = V$. Les conditions (2,7) sont remplies, en vertu des affirmations B), C) du lemme, et (2,6) nous donne alors :

$$\int_a^{+\infty} ug\, dx = -\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=x_m} +$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx + \int_{x_m}^{+\infty} v_m E(u)\, dx. \qquad (2,21)$$

Cette formule est équivalente à (2,3) si on pose :

$$A_{ih} = [E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i} \qquad (2,22)$$

$$R(u) = \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx, \quad (\text{avec } x_{m+1} = +\infty,\ v_m = V), \qquad (2,23)$$

et cette expression de R(u) démontre que (2,4) est vérifiée.

Nous pouvons conclure que, *sous les hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) le procédé du §.1 est applicable aussi au cas des formules de quadrature sur l'intervalle $(a, +\infty)$* (1), pourvu qu'on prenne comme intégrale v_m l'intégrale V définie par (2,20).

Démontrons maintenant que ce procédé est le plus général. Supposons que (2,3) soit valable sous la condition (2,4) et les hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) ; il s'agit de démontrer l'existence (et l'unicité) de m-1 intégrales $v_1, \dots, v_{m-1}$ de $E^*(v) = g$ qui, unies aux intégrales v_0 [définie par (1,10)] et $v_m = V$ [définie par (2,20)], permettent d'exprimer les coefficients A_{ih} et le reste R(u) par les formules (2,22), (2,23).

Il suffit d'abord de définir $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m$ de proche en proche au moyen des conditions initiales :

$$\begin{cases} [E^*_{n-h-1}(v_1)]_{x=x_1} = A_{1h} + [E^*_{n-h-1}(v_0)]_{x=x_1}, \\ [E^*_{n-h-1}(v_2)]_{x=x_2} = A_{2h} + [E^*_{n-h-1}(v_1)]_{x=x_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [E^*_{n-h-1}(v_{m-1})]_{x=x_{m-1}} = A_{m-1,h} + [E^*_{n-h-1}(v_{m-2})]_{x=x_{m-1}}, \\ [E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=x_m} = A_{mh} + [E^*_{n-h-1}(v_{m-1})]_{x=x_m} \end{cases} \qquad (2,24)$$
$$(h = 0, 1, \dots, n-1)$$

pour assurer la validité des formules (2,22) ; d'autre part il est bien évident qu'il n'y a pas d'autres choix pour ces intégrales.

Nous devons encore démontrer que $v_m = V$ et que (2,23) est valable.

Avec les intégrales $v_1, v_2, \dots, v_m$ définies par (2,24) nous pouvons écrire (2,6) et ensuite passer à la limite pour $b \longrightarrow +\infty$, en tenant compte des hypothèses et des affirmations A), B) du lemme - Comme nous ne savons pas encore que $v_m = V$, nous trouverons, au lieu de (2,21), la formule suivante :

$$\int_a^{+\infty} ug\, dx = -\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=x_m} -$$
$$-\lim_{x\to+\infty}\sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}E^*_{n-h-1}(v_m) + \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\, dx + \int_{x_m}^{+\infty} v_m E(u)\, dx, \qquad (2,25)$$

c'est-à-dire, en vertu de (2,22) :

----

(1) Ce procédé est valable aussi pour l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; voir [4].

$$\int_a^{+\infty} ug\,dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=o}^{n-1} A_{ih}\, u^{(h)}(x_i) - \lim_{x \to +\infty} \sum_{h=o}^{n-1} u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m) + \sum_{i=o}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\, E(u)\, dx. \tag{2,26}$$

En comparant avec (2, 3) on obtient :

$$R(u) = \sum_{i=o}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\, E(u)\, dx - \lim_{x \to +\infty} \sum_{h=o}^{n-1} u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m). \tag{2,27}$$

En vertu de (2, 4) on doit avoir $R(y_k) = 0$, $(k = 1, 2, \dots, n)$; en tenant compte de (2,27), celà entraîne :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{h=o}^{n-1} y_k^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{2,28}$$

Mais, d'après (2, 9) (avec $u = y_k$, $v = v_m$) et (2, 19) (avec $\alpha_i = \delta_{ik}$, $f = 0$), la limite (2,28) est égale à $\beta_k - \int_a^{+\infty} y_k(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$; donc (2,28) exprime que les constantes β_k correspondantes à l'intégrale v_m sont données par $\beta_k = \int_a^{+\infty} y_k(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$, c'est-à-dire que $v_m = V$. Alors, en vertu de l'affirmation C) du lemme, la limite qui figure en (2,27) est nulle et (2,27) se réduit à (2,23).

$\boxed{3}$ - Ajoutons deux remarques sur les résultats du §. 2. La première pour constater que la formule (2, 3), accompagnée par (2,22) et (2,23), reste valable si $x_m = +\infty$ pourvu qu'elle soit interprétée sous la forme suivante :

$$\int_a^{+\infty} ug\, dx = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{h=o}^{n-1} A_{ih}\, u^{(h)}(x_i) - \lim_{x \to +\infty} \sum_{h=o}^{n-1} u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_{m-1}) + R(u), \tag{3,1}$$

les coefficients A_{ih} étant donnés par (2,22) et le reste $R(u)$ par (2,23) avec $\int_{x_m}^{x_{m+1}} v_m\, E(u)\, dx = 0$. La formule (3, 1) est une conséquence immédiate de (2,21), en passant à la limite pour $x_m \longrightarrow +\infty$ et en tenant compte de l'affirmation A) du lemme.

La deuxième remarque a rapport à la question des intégrales *absolument convergentes*. Tous les raisonnements du §. 2 restent valables si on remplace (2, 1), (2, 5), (2, 8) par les hypothèses plus restrictives $ug \in L$, $y_i g \in L$, $z_i E(u) \in L$. Il faut toutefois remarquer que *ces trois hypothèses ne sont plus indépendantes* ; on a en effet :

$$y_i\, g \in L, \quad z_i\, E(u) \in L \Longrightarrow ug \in L. \tag{3,2}$$

En posant $E(u) = f$ et en rappelant (2, 15) on déduit :

$$|ug| = \left| \sum_{i=1}^{n} y_i\, g\left(\alpha_i + \int_a^{x} z_i\, f\, d\xi\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i\, g| \left(|\alpha_i| + \int_a^{+\infty} |z_i\, f|\, d\xi\right)$$

ce qui prouve évidemment la validité de (3, 2).

$\boxed{4}$ - La méthode du §. 1 peut s'étendre au cas des intégrales doubles ; je renvoie pour ce problème au travail [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di quadratura* - Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XXVI, 1954-55.

[2] A. GHIZZETTI - *Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura* - Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXVI, 1956.

[3] A. GHIZZETTI - *Lezioni di Analisi Superiore* (*Teoria dell'approssimazione lineare*) - Cap. VI - Ed. Libreria Eredi Virgilio Veschi-Roma-1955-56.

[4] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati* - Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei-vol. XXXII - 1962, p. 290-298 et 467-470.

[5] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di cubatura relative ad intervalli piani* - Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XIV - 1960.

DISCUSSION

M. CAYREL - La majoration de la valeur absolue du reste est souvent délicate dans les formules d'intégration numérique. Peut-on profiter de l'arbitraire qui s'introduit dans la définition des v_i pour les choisir avec un signe constant sur tout l'intervalle (a, b) ?

M. GHIZZETTI - Ceci est possible car les v_i sont arbitraires. On dispose ici du choix de l'opérateur et des intégrales v_i ; on pourra donc chercher un reste facile à majorer. Pour chaque calcul on peut établir la formule la plus commode. Il faut cependant veiller à choisir des intégrales faciles à calculer, mais il reste un grand nombre de degrés de liberté qui permet une grande souplesse d'emploi.

M. KUNTZMANN - En modifiant les v_i, on modifie les coefficients ; si on choisit des v_i positifs, on risque donc d'avoir une grande erreur. Il faudrait alors choisir entre une erreur facile à évaluer et une grande précision.

M. GHIZZETTI - La méthode permettrait en effet d'optimiser les formules, ce qui constituerait une recherche intéressante.

M. de POSSEL - Comment peut-on choisir pratiquement les fonctions v_i dans le cas de l'intervalle infini ?

M GHIZZETTI - Il se peut que ce choix soit très difficile, mais on a une expression explicite des v_i faisant intervenir des quadratures.