

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. HEYTING

Méthode et problèmes de l'intuitionnisme

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, n° 1 (1962), p. 101-105

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_101_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE ET PROBLÈMES DE L'INTUITIONNISME

A. HEYTING

Amsterdam

La méthode qui s'impose naturellement à un mathématicien intuitionniste est celle de la construction directe. Par exemple, dans les diverses théories du nombre réel on commence par définir un schéma de construction pour les objets de la théorie. Un nombre réel est défini par une suite de nombres rationnels $\{a_n\}$ telle que $\forall k \exists n \forall p (|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k})$. Cette définition nous donne le moyen de construire effectivement des nombres réels. Les définitions des opérations arithmétiques sont constructives au même sens du mot ; étant donnés deux nombres réels, on peut construire une suite qui définit leur somme, etc. Une autre théorie qui se trouve dans la phase de construction directe est celle de la mesure et de l'intégration. Les définitions fondamentales de cette théorie consistent en des schémas de calcul pour la mesure d'une espèce de points. Quant à la priorité historique de la méthode de construction directe, il n'y a aucune différence essentielle entre l'histoire des mathématiques intuitionnistes et celle des mathématiques classiques. Toutes les théories mathématiques ont leur origine dans des théories concrètes et constructives. Ce n'est qu'après l'étude d'exemples compliqués et variés que l'on sent le besoin d'une systématisation nouvelle, pour laquelle la méthode axiomatique est l'instrument. Je ne parlerai pas des avantages, bien connus d'ailleurs, de cette méthode ; je me borne à remarquer, ce qui est peut-être moins connu, que ces avantages existent aussi bien pour l'intuitionniste. Commençons par un exemple très simple. Dans la théorie des nombres réels on rencontre la relation de distance entre deux nombres, $a \# b$, qui se définit ainsi : soient $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ deux suites de nombres rationnels qui définissent a et b respectivement, alors $a \# b$ signifie :

$$\forall k \exists p \exists q (|a_{p+q} - b_{p+q}| > 2^{-k}).$$

C'est une définition par construction directe, en tant qu'elle nous permet de constater par un calcul que $a \# b$ est vrai. Or on remarque que la relation $\#$ jouit des propriétés suivantes :

$$S1. \quad a = b \iff \neg(a \# b)$$

$$S2. \quad a \# b \implies b \# a$$

$$S3. \quad a \# b \implies a \# c \vee c \# b.$$

Dans la plupart des démonstrations de la théorie des nombres réels on n'utilise que ces propriétés ; en outre, dans d'autres domaines on rencontre des relations satisfaisant S1, S2, S3. Ainsi on est conduit à introduire S1, S2, S3 comme axiomes caractérisant une relation de distance. L'introduction de la notion abstraite de relation de distance était nécessaire pour développer une théorie des corps et une théorie des espaces linéaires sur un corps.

La relation $\#$ est un exemple d'une relation de distinction. Appelons relation de distinction une relation ρ dont la négation est une relation d'équivalence, c'est-à-dire telle que :

$$D1. \quad \neg \rho(x, x)$$

$$D2. \quad \neg \rho(x, y) \implies \neg \rho(y, x)$$

$$D3. \quad \neg \rho(x, y) \ \& \ \neg \rho(y, z) \implies \neg \rho(x, z)$$

Une relation qui satisfait à D1, D2, D3 n'est pas nécessairement la négation d'une relation d'équivalence, comme le montre l'exemple de la relation $\#$ entre nombres réels. La négation $\tau = \neg \sigma$ d'une relation d'équivalence σ est stable ; c'est-à-dire $\neg \neg \tau(x, y) \implies \tau(x, y)$. Si l'on ajoute à D1 - D3 la condition de stabilité :

$$D4. \neg \neg \rho(x, y) \longrightarrow \rho(x, y),$$

ρ sera la négation de $\neg \rho$, qui est une relation d'équivalence. En utilisant D4, on peut remplacer D2 par :

$$D2'. \rho(x, y) \longrightarrow \rho(y, x).$$

Le système d'axiomes D1, D2', D3 est très faible. On le renforce en remplaçant D3 par :

$$D5. \rho(x, y) \ \& \ \neg \rho(x, z) \longrightarrow \rho(z, y),$$

ou par l'axiome plus fort que D5 :

$$D6. \rho(x, y) \longrightarrow \rho(x, z) \vee \rho(x, y).$$

Les rapports entre ces systèmes d'axiomes ont été étudiés par Van Rootselaar ; il cite comme exemples les notions de distinction que Brouwer avait introduites dans la théorie des espèces de points.

Citons encore comme exemple d'une théorie axiomatisée celle de l'espace de Hilbert. En ce cas les axiomes de Von Neumann pouvaient être acceptés avec des changements peu importants, quoique des difficultés plus sérieuses soient à surmonter dans les démonstrations.

La topologie des espaces séparables compacts a été axiomatisée par Freudenthal. L'étude détaillée de la topologie de quelques catégories d'espaces, comme par exemple celle des espaces euclidiens, me paraît permettre des résultats intéressants à un mathématicien intuitionniste ; en commençant par une théorie basée sur des constructions directes, il pourra s'élever à des théories axiomatisées.

Dans toutes les théories citées le rôle de la méthode axiomatique est à peu près le même que dans les mathématiques classiques, si différentes que soient quelquefois les théories intuitionnistes et classiques elles-mêmes. Les énoncés de la théorie s'interprètent hypothétiquement : Si pour un certain modèle M les axiomes sont vrais, alors les théorèmes déduits des axiomes seront vrais pour M . Par exemple, si dans un certain ensemble E on a défini une relation ρ pour laquelle les axiomes S1, S2, S3 sont vrais, alors tous les théorèmes que l'on peut déduire de ces axiomes, seront vrais pour ρ dans E . Il va sans dire que "déduire" doit être pris dans le sens intuitionniste.

La situation est très différente pour l'axiomatisation de la théorie des ensembles, parce qu'ici l'interprétation hypothétique ne saurait s'appliquer. L'expression "espèce mathématique" désigne tout ce qui peut être construit, au sens le plus large du mot, en mathématiques. Par conséquent, il n'y a qu'une seule interprétation possible pour les notions fondamentales, et l'hypothèse que pour cette interprétation les axiomes sont vrais ne peut être vérifiée que par la démonstration que les axiomes sont des théorèmes de la théorie des ensembles.

Peut-être ce que je veux dire deviendra plus clair quand je me sers de l'interprétation bien connue d'un système d'axiomes comme une définition implicite des notions fondamentales qui y figurent. Par exemple, un ensemble dans lequel une fonction binaire est définie, est un groupe, si les axiomes de la théorie des groupes y sont vrais. En essayant d'interpréter d'une manière analogue les axiomes de la théorie des ensembles, on obtient des énoncés circulaires.

Si nous examinons les axiomes qui se trouvent à la base, par exemple, de la théorie des ensembles selon Zermelo-Fraenkel, nous verrons que la plupart correspondent dans la théorie des espèces selon Brouwer à des théorèmes très simples. Cela vaut même pour l'axiome de choix, si l'on le formule : Si A est une espèce d'espèces disjointes telle que chaque élément de A contient au moins un élément, alors il existe une espèce B telle que l'intersection de B avec un élément quelconque de A contient un élément et un seul. On se convainc de la validité de cet énoncé par la remarque suivante. Nous ne pouvons savoir que chaque élément de A contient au moins un élément, que par la connaissance d'une loi qui détermine un élément dans chaque élément de A ; cette loi nous donne justement la fonction qu'il nous faut.

Comme je viens de dire, la théorie des espèces ne se prête pas à l'axiomatisation. Néanmoins on peut se demander s'il ne serait pas intéressant d'étudier des théories restreintes dans lesquelles, en partant de certaines espèces fondamentales comme celle des nombres naturels, on borne la formation de nouvelles espèces à des méthodes prescrites d'avance. De telles théories existent déjà, par exemple celle des espèces récursives, respectivement récursivement énumérables.

Le chapitre sur les ensembles finis en mathématiques intuitionnistes est difficile. De Iongh, dans un travail non-publié, a introduit les notions d'espèce pseudo-finie et d'espèce quasi-finie. Une espèce est pseudo-finie si elle est sous-espèce d'une espèce finie ; une espèce A est quasi-finie s'il existe une application d'une espèce finie sur A . En réitérant les procédés de former une sous-espèce et de définir une application il obtient les notions d'espèce pseudo-quasi-finie, respectivement quasi-pseudo-finie ; de nouvelles itérations reconduisent aux mêmes notions. Il faut ajouter que pour les espèces de nombres naturels le schéma de ces notions se simplifie, parce que toute espèce quasi-finie de nombres naturels est finie.

Pour donner une idée de la nature des difficultés qu'on rencontre dans de telles recherches, je veux examiner la définition de la notion d'ensemble fini due à Tarski, dont voici la forme originale : L'ensemble A est fini lorsque toute classe non-vide K de ses sous-ensembles admet au moins un élément irréductible. Ici B est appelé élément irréductible de A lorsque $B \in K$ tandis qu'aucun vrai sous-ensemble de B n'appartient à K .

La propriété formulée ainsi n'est pas vraie pour les espèces finies. Une sous-espèce C d'une espèce finie A peut être définie d'une manière si bizarre que l'on ne sait décider pour aucun élément de A s'il y appartient ou non ; en outre, on ne sait pas toujours décider pour deux sous-espèces de A si l'une est contenue dans l'autre. Une sous-espèce C de A est dite détachable lorsqu'on sait décider pour tout élément x de A si $x \in C$ ou $x \notin C$. Une sous-espèce détachable d'une espèce finie est finie, et pour deux sous-espèces détachables C et D d'une espèce finie A on sait décider si $C \subset D$ ou non. Appelons $\mathcal{D}_D(A)$ l'espèce des sous-espèces détachables de A . Il n'est pas vrai que toute sous-espèce de $\mathcal{D}_D(A)$ contient un élément irréductible au sens de Tarski ; cependant, cette propriété devient valable si nous nous bornons aux espèces détachables de $\mathcal{D}_D(A)$. Ainsi nous arrivons à l'énoncé suivant : Une espèce A est finie lorsque toute sous-espèce détachable K de $\mathcal{D}_D(A)$, qui contient au moins un élément, contient au moins un élément irréductible. Mais selon cette définition l'espèce R des nombres réels serait finie. En effet, d'après Brouwer R ne contient que deux sous-espèces détachables, à savoir ϕ et R . Pour éviter cette conclusion fâcheuse, ajoutons la condition que A est discrète, c'est-à-dire que pour deux éléments x et y de A on sait décider si $x = y$ ou $x \neq y$. Ainsi nous arrivons à la définition définitive : L'espèce A est T -finie lorsque A est discrète, et que toute sous-espèce détachable K de $\mathcal{D}_D(A)$, qui contient au moins un élément, contient au moins un élément irréductible.

J'ai peu gagné en rédigeant cette définition. Il est vrai que toute espèce finie y satisfait et qu'il paraît difficile de construire un exemple d'une espèce T -finie dont on ne sait pas qu'elle est finie, mais je ne sais tirer aucune conclusion de quelque importance de la définition d'espèce T -finie. Par exemple, je ne sais pas démontrer que l'union de deux espèces T -finies est T -finie.

Les difficultés de la notion d'espèce finie sont un cas spécial des questions concernant les rapports entre l'intuitionnisme et la théorie des fonctions récursives. J'admets comme bien connues les notions de fonction récursive, d'ensemble récursif, etc. On considère souvent la notion de fonction récursive comme le moyen de préciser la notion intuitive de fonction effectivement calculable, en croyant pouvoir éliminer les notions intuitives du calcul effectif. Or, tout ensemble fini est récursif et comme, d'après la logique classique, tout sous-ensemble d'un ensemble fini est lui-même fini, tout sous-ensemble d'un ensemble fini est récursif, c'est-à-dire décidable. Soit A l'espèce formée du seul élément 1. Soit P quelque problème non-résolu, par exemple la question de savoir si l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction ζ est vraie. Soit B la sous-espèce de A qui contient 1 si et seulement si la réponse à P est positive. Selon l'interprétation la plus répandue, B est un ensemble récursif, mais évidemment B n'est pas effectivement décidable. Qui prétend que toute espèce récursive au sens classique est décidable, doit pouvoir résoudre tous les problèmes mathématiques.

De tels exemples mènent à la conclusion que la théorie classique des fonctions récursives s'est éloignée essentiellement de la notion de calculabilité effective. Cela n'empêche pas, je tiens à le dire, qu'elle est intéressante et importante. Mais une vraie théorie du calcul effectif ne pourra se passer d'une notion intuitive d'effectivité et pour ne pas la perdre au cours des raisonnements elle devra se baser sur la logique intuitionniste, qui seule mène d'énoncés sur ce qui est effectivement décidable à de nouveaux énoncés de la même espèce. Une telle théorie sert à délimiter à l'intérieur des mathématiques constructives un domaine plus précis et plus facilement maniable du récursif.

La notion de suite indéfiniment prolongeable, appelée aussi plus brièvement, mais moins correctement, suite de choix, et celle de déploiement sont caractéristiques pour les mathématiques intuitionnistes. C'est par rapport à ces notions que s'applique une méthode qu'on pourrait appeler méta-mathématique, quoiqu'elle ne réponde pas à ce que l'on entend généralement par ce mot. L'application

la plus connue de cette méthode est dans la démonstration du théorème fondamental de Brouwer sur les déploiements bornés que j'appellerai, en traduisant le terme anglais "fan theorem", le théorème de l'éventail. En voici l'énoncé : "Si, à chaque élément e d'un déploiement borné M on associe un nombre naturel β_e , alors on peut indiquer un nombre naturel z tel que β_e soit déterminé par les z premiers des choix engendrant e ". Pour bien comprendre la méthode, il faut se rappeler que l'implication $A \longrightarrow B$ est interprétée dans la logique intuitionniste par "On sait compléter toute démonstration de A à une démonstration de B ". Dans presque tous les cas on effectue cette complétion sans analyser la démonstration hypothétique de A . Il en est ainsi dans toutes les théories axiomatiques dont je viens de parler. On suppose que l'on a un modèle M du système d'axiomes A et on déduit des théorèmes sur M sans se demander comment on peut savoir que M satisfait aux axiomes A . Mais puisque l'hypothèse ne consiste pas en un fait mais en la démonstration d'un fait, on pourrait en principe utiliser la forme que cette démonstration peut avoir pour en déduire des résultats. Voilà justement ce que Brouwer a fait dans sa démonstration du théorème de l'éventail. Il se demande comment on peut savoir qu'une certaine loi associe un nombre naturel β_e à chaque élément e d'un déploiement borné, et la réponse à cette question forme la base de la démonstration.

Je ne veux pas insister sur les détails de la démonstration du théorème de l'éventail ; je me borne à remarquer que les démonstrations mathématiques y sont considérées elles-mêmes comme objets de recherche mathématique ; c'est en ce sens que la méthode se rapproche de la mathématique de Hilbert. Bien entendu, il n'y a pas de séparation entre les mathématiques propres et la métamathématique, la dernière étant complètement intégrée dans les mathématiques. L'argument que je viens d'employer pour démontrer que l'axiome de choix est vrai en mathématiques intuitionnistes, est de la même nature.

Il est peut-être utile de dire quelques mots sur une application plus simple mais moins connue d'une méthode analogue, à savoir la démonstration du théorème de Brouwer que tout ordre partiel inextensible est un ordre virtuel. Expliquons d'abord ces mots. La relation $<$ est une relation d'ordre partiel dans l'espèce S si pour tous les éléments a, b, c de S on a :

- I. $a < b \longrightarrow a \neq b \ \& \ b \not< a$
- II. $a < b \ \& \ b < c \longrightarrow a < c$.

Ici $a \neq b$ s'écrit à la place de $\neg(a = b)$ et $b \not< a$ à la place de $\neg(b < a)$; \neg dénote la négation. $<$ est une relation d'ordre virtuel si elle satisfait en outre à III et IV.

- III. $a \not< b \ \& \ b \not< a \longrightarrow a = b$
- IV. $a \not< b \ \& \ a \neq b \longrightarrow b < a$.

Soit Σ la relation $<$ considérée comme espèce de couples (a, b) . La propriété d'inextensibilité de Σ s'exprime comme suit : Admettons comme point de départ l'espèce Σ et comme moyens de démonstration les règles I et II ; si, pour un couple donné (x, y) il est impossible de déduire par ces moyens qu'il n'appartient pas à Σ , alors $(x, y) \in \Sigma$. De même, lorsque pour deux éléments x, y il est impossible de déduire par les moyens indiqués que $x \neq y$, alors $x = y$.

Le théorème de Brouwer dit que toute relation d'ordre virtuel est une relation inextensible d'ordre partiel. Inversement, toute relation inextensible d'ordre partiel est une relation d'ordre virtuel. La situation est différente de celle pour le théorème de l'éventail, où la question de la forme possible pour la démonstration d'un certain résultat joue un rôle ; ici la forme de la démonstration est prescrite. Tout de même, le fait qu'un certain résultat se déduit de l'impossibilité d'une démonstration d'une forme prescrite implique une liaison intime entre les mathématiques et la métamathématique.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 L. E. J. BROUWER - Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* 33 (1924), 251-256.
- 2 L. E. J. BROUWER - Ueber Definitionsbereiche von Funktionen. *Math. Annalen* 97 (1926), 60-76.

- 3 L.E.J. BROUWER - Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* 36 (1927), 127-129.
- 4 L.E.J. BROUWER - Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung. *Journ. f. Math. (Crelle)* 157 (1927), 255-257.
- 5 H. FREUDENTHAL - Zum intuitionistischer Raumbegriff. *Compositio Math.* 4 (1936), 82-111.
- 6 A. HEYTING - *Intuitionism, an introduction*. Amsterdam, 1956.
- 7 A. HEYTING - Axiomatic method and intuitionism. *Essays on the foundations of mathematics, dedicated to A.A. Fraenkel*. Jerusalem, 1961.
- 8 B. VAN ROOTSELAAR - On intuitionistic difference relations. *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam Sér. A*, 63 = *Indagationes Math.* 22 (1960), 316-322.
- 9 A. TARSKI - Sur les ensembles finis. *Fundamenta Math.* 6 (1924), 45-95.