ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analyse algébrique. De l'élimination entre un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 41-65
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__41_0>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

De l'élimination entre un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques ;

Par M. GERGONNE.

ON sait que, pour transformer des tables de logarithmes, calculées pour une certaine base, en tables de logarithmes relatives à une autre base, il suffit de diviser tous les logarithmes des tables données par le logarithme de la nouvelle base, pris dans ces mêmes tables. Mais celui-là serait bien maladroit qui, ayant à exécuter une pareille transformation, ferait effectivement autant de divisions que les tables données contiendraient de logarithmes ; il est incomparablement plus court et plus commode de diviser l'unité une fois pour tout, par le logarithme de la nouvelle base, pris dans les tables données, et de multiplier ensuite tous les logarithmes de ces mêmes tables par le quotient obtenu. On pourrait même en formant, à l'avance, une table des produits de ce quotient, par les neuf premiers nombres naturels, réduire tout le travail à de simples additions.

C'est à peu près de cette manière qu'en agissent les habiles calculateurs, dans tous les cas analogues ; ils évitent avec grand soin les divisions et extractions de racines qu'ils remplacent, autant qu'ils le peuvent, par des multiplications et des formations de puissances ; et tel est, en particulier, un des principaux avantages qu'on retire, dans la pratique, du développement des fonctions en séries. Ils poussent même l'attention jusqu'à éviter les soustractions que, au moyen de ce qu'on appelle *complémens arithmétiques*, ils parviennent à remplacer par des additions.

Parmi les recherches dans lesquelles la division est employée, une des plus ingrates, à raison des diverses préparations que le plus souvent elle nécessite, est sans doute celle du plus grand commun diviseur entre deux polynomes proposés. Or, comme l'observe M. Bérard, géomètre distingué de Briançon, dans une note qu'il nous a transmise il y a quelque temps, ici, comme en beaucoup d'autres rencontres, la multiplication peut suppléer à la division. Chercher, en effet, le plus grand commun diviseur, entre deux polynomes P et P', fonctions rationnelles et entières de x, c'est, en d'autres termes, chercher l'équation du degré le plus élevé en x qui puisse vérifier à la fois les deux équations $P=0$, $P'=0$. Pour la découvrir, M. Bérard combine celles-là entre elles par multiplication et addition, de manière à rabaisser le degré de l'une et de l'autre successivement d'une, de deux, de trois, ... unités, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à deux équations identiquement les mêmes, ou ne diffèrent au plus l'une de l'autre que par un facteur indépendant de x. En supposant que, privées de ce facteur, elle se réduisent toutes deux à $D=0$, cette dernière sera évidemment l'équation du degré le plus élevé qui puisse vérifier à la fois les deux premières, d'où il suit que le polynome D sera le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes P et P'.

Pour faire de ce procédé une application dont l'utilité puisse être facilement comprise, M. Bérard suppose qu'ayant à résoudre l'équation

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0\ , \qquad (1)$$

on veuille, avant tout, mettre en évidence ses racines égales, si toutefois elle en a de telles. On sait que, s'il en est ainsi, la dérivée de son premier membre doit être nulle, et que le plus grand commun diviseur, entre ce premier membre et sa fonction dérivée, doit contenir tous les facteurs égaux de la proposée, excepté un de chaque sorte; égalant donc cette dérivée à zéro, ce qui donnera

$$7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8=0\ ; \qquad (2)$$

il s'agira, en premier lieu, de trouver l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (1) et (2).

Pour cela, soit prise la somme de leurs produits respectifs par $+7$ et $-x$, il en résultera cette nouvelle équation du sixième degré qui pourra remplacer celle du septième dans la recherche de leurs racines communes

$$5x^6+12x^5-18x^4-60x^3-15x^2+48x+28=0\ ; \qquad (3)$$

de sorte que nous n'aurons plus à considérer que deux équations du sixième degré seulement.

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (2) et (3), d'abord par $+5$ et -7, puis par -7 et $+2$, en divisant la première des équations résultantes par 6 et la seconde par $3x$, il viendra

$$11x^5+46x^4+50x^3-20x^2-61x-26=0\ , \qquad (4)$$

$$13x^5+62x^4+82x^3-16x^2-95x-46=0\ ; \qquad (5)$$

équations qui ne sont plus que du cinquième degré seulement, et qui peuvent, comme les équations (2) et (3), remplacer les deux proposées dans la recherche de leurs racines communes.

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces deux dernières, d'abord par -13 et $+11$, puis par $+23$ et -13, en divisant la première des équations résultantes par 84 et la seconde par $84x$, il viendra également

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=0\ ; \qquad (6)$$

cette dernière équation vérifie donc, à elle seule, les proposées (1) et (2); son premier membre est donc le plus grand commun diviseur des leurs.

Veut-on savoir si cette dernière équation (6) n'a pas elle-même des racines égales? Il faudra pareillement égaler à zéro la dérivée de son premier membre, ce qui donnera

$$4x^3+9x^2+2x-3=0\ ; \qquad (7)$$

et chercher quelle est l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (6) et (7).

Soit prise d'abord la somme de leurs produits respectifs par $+4$ et $-x$; on obtiendra cette seconde équation du troisième degré

$$3x^3+2x^2-9x-8=0\ ; \qquad (8)$$

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (7) et (8), d'abord par $+3$ et -4, puis par $+8$ et -3, il viendra, en divisant par x, la dernière des équations résultantes,

$$19x^2+42x+23=0\ , \qquad (9)$$

$$23x^2+66x+43=0\ ; \qquad (10)$$

équations qui ne sont plus que du second degré seulement.

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces dernières, d'abord par -23 et $+19$, puis par $+43$ et -23, et divisant la première des deux équations résultantes par 288 et la seconde par $288x$, il viendra également

$$x+1=0\ ; \qquad (11)$$

cette équation vérifie donc, à elle seule, les proposées (6) et (7); son premier membre est donc le plus grand commun diviseur des leurs.

Donc, suivant la théorie connue des racines égales, le premier membre de l'équation (6) est divisible par $(x+1)^2$; et, en effet, en exécutant la division, on trouve que cette équation revient à

$$(x^2+x-2)(x+1)^2=0\ ; \qquad (12)$$

donc aussi, suivant la même théorie, il y a, dans le premier membre de la proposée (1), deux facteurs égaux à x^2+x-2 et trois facteurs égaux à $x+1$, et, comme elle n'est que du septième degré seulement, elle doit revenir à

$$(x^2+x-2)^2(x+1)^3=0\ ; \qquad (13)$$

comme on s'en assure, en effet, par le développement.

Voilà donc que, par des multiplications et additions extrêmement simples et faciles, nous sommes parvenus à mettre en évidence les racines égales d'une équation proposée du septième degré, et l'on reconnaît ici le procédé d'élimination donné par Euler, dans le deuxième volume de son *Introduction au calcul différentiel* (chap. XIX), procédé fort élégant et fort commode et qui nous paraît bien préférable à la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, où, par une inconcevable antinomie, on remplace à dessein, par des divisions, ce qui se peut faire si simplement par des multiplications ; méthode dont nous ne pensons pas que jamais aucun calculateur tant soit peu exercé se soit jamais avisé de se servir pour son propre usage, et qui n'est, de la sorte, qu'une méthode de pure spéculation, une méthode d'apparat, uniquement réservées pour les examens publics (*).

(*) J'ai vu un temps où cette méthode d'élimination était tellement en faveur que les examens des aspirans aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle ; on était admis ou rejeté suivant

Avant d'examiner plus en détail, et de chercher à réduire à sa juste valeur la critique plus ou moins vive qu'on a faite, dans divers ouvrages élémentaire, de la méthode d'élimination d'Euler, et les motifs de la préférence accordée à celle qui se fonde sur la recherche du plus grand commun diviseur, remarquons d'abord que le procédé de M. Bérard pourrait être facilement étendu à la recherche du plus grand commun diviseur entre trois ou un plus grand nombre de polynomes.

Pour en donner un seul exemple, supposons qu'on ait uniquement intérêt à savoir si l'équation (1) n'a pas quelques racines triples ; il est connu que, si elle a de telles racines, elles doivent se trouver, non seulement dans l'équation (2), mais encore dans l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de cette dernière ; ce qui donnera, en divisant par 6,

$$7x^5+25x^4+20x^3-12x^2-15x-1=0\ ; \qquad (14)$$

de sorte que la question se trouvera amenée à assigner le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations (1), (2), (14), ou, ce qui revient au même, l'équation du degré le plus élevé qui les vérifient toutes trois.

D'abord, en opérant sur les équations (1) et (2), comme nous l'avons fait ci-dessus, on en conclura l'équation (3) qui, dans la recherche qui nous occupe, pourra ainsi remplacer la première ; de sorte que la question se trouvera réduite à assigner l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (2), (3), (14).

---

qu'on la possédait bien ou mal. Un peu avant, ç'avait été le tour de la discussion des lignes du second ordre, par la résolution effective de leur équation, c'est-à-dire, par la méthode de Chézy ; méthode qui refuse le service dès le troisième degré, et que néanmoins on persiste encore aujourd'hui à offrir comme modèle.

D'abord, en retranchant de l'équation (2) le produit de l'équation (14), par x, il vient

$$5x^5+10x^4-12x^3-30x^2-5x+8=0\ ; \qquad (15)$$

en prenant ensuite la somme des produits respectifs des équations (3) et (14) par -7 et $+5$, il vient

$$41x^5+226x^4+360x^3+30x^2-341x-196=0\ ; \qquad (16)$$

de sorte que nous n'avons plus à considérer que les trois équations du cinquième degré (14), (15), (16).

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces trois dernières, d'abord par $+720$, -557 et -55, ensuite par $+1308$, -1331 et -61, puis enfin par $+3708$, -2599 et -125 (*), en divisant la première des équations résultantes par 12, la seconde par $12x$ et la troisième par $12x^2$, il viendra

$$107x^3+535x^2+895x+467=0\ , \qquad (17)$$

$$467x^3+1681x^2+1867x+653=0\ , \qquad (18)$$

$$653x^3+3205x^2+5029x+2477=0\ ; \qquad (19)$$

équations qui ne sont plus que du troisième degré, et qui, dans la recherche qui nous occupe, peuvent remplacer les équations (1), (2), (14).

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces trois dernières, d'abord par $+66507$, $+1070$ et -11663, ensuite par $+121725$, $+6652$ et -24703, puis enfin par $+223437$, $+21938$ et -47909, en divisant la première des équations résultantes par 2868228, la seconde par $2868228x$ et

---

(*) On verra plus loin comment se forment ces multiplicateurs.

la troisième par $2868228x^2$, il viendra également $x+1=0$; d'où on conclura que $x+1$ est le seul facteur triple du premier membre de l'équation (1), comme nous l'avions déjà trouvé.

Revenons présentement à l'élimination, et remarquons, en premier lieu, que, quelles que soient deux équations algébriques en x, entre lesquelles on se propose d'éliminer cette lettre, et que nous supposons d'ailleurs ne renfermer ni radicaux ni dénominateurs, il est toujours permis de les supposer du même degré, par rapport à cette même lettre ; puisque, dans le cas où elles seraient de degrés inégaux, on pourrait toujours les amener à être du même degré, en multipliant la moins élevée des deux par une puissance convenable de x. C'est donc fort inutilement, à ce qu'il nous paraît, que Euler, dans l'endroit cité, a cru devoir considérer, tour à tour, des équations du même degré et des équations de degrés différens.

Soient donc les deux équations d'un même degré quelconque

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=0\ ;$$

$$B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ;$$

le problème de l'élimination consiste à déduire de ces équations : 1.° une équation de relation entre les coefficiens de leurs différens termes ; 2.° une valeur rationnelle de x fonction de ces coefficiens.

Remarquons bien que le mécanisme du calcul étant tout à fait indépendant de ce que représentent les symboles sur lesquels on l'exécute, le problème se résoudra toujours de la même manière quels que soient les coefficiens des deux proposées. Si ces coefficiens sont des quantités déterminées, l'équation de relation entre eux exprimera la condition nécessaire pour que ces deux équations puissent être satisfaites par une même valeur de x qui sera précisément la valeur qu'on obtiendra pour cette inconnue. Si ces coefficiens sont des fonctions quelconques d'une autre inconnue y, l'équation de relation entre eux sera ce qu'on appelle, dans la théorie de l'élimination, *l'équation finale en* y, et alors la valeur de x sera exprimée en fonction de cette dernière inconnue. On pourrait d'ailleurs supposer que ces coefficiens sont fonctions d'un plus grand nombre de variables.

Ces choses ainsi entendues, soit prise, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces deux équations, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_m$ et $-A_m$ (*), et divisant la dernière des deux équations résultantes par x, et posant, pour abréger,

$$\begin{array}{ll}
A_0B_1-A_1B_0=C_1\ , & A_{m-1}B_m-A_mB_{m-1}=C_{2m-1}\ , \\
A_0B_2-A_2B_0=C_2\ , & A_{m-2}B_m-A_mB_{m-2}=C_{2m-2}\ , \\
A_0B_3-A_3B_0=C_3\ , & A_{m-3}B_m-A_mB_{m-3}=C_{2m-3}\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_0B_{m-1}-A_{m-1}B_0=C_{m-1}\ , & A_1B_m-A_mB_1=C_{m+1}\ , \\
\end{array}$$

$$A_0B_m-A_mB_0=C_m\ ,$$

on aura

$$C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+C_3x^{m-3}+\ldots\ldots+C_{m-2}x^2+C_{m-1}x+C_m=0\ ,$$

$$C_mx^{m-1}+C_{m+1}x^{m-2}+C_{m+2}x^{m-3}+\ldots\ldots+C_{2m-3}x^2+C_{2m-2}x+C_{2m-1}=0\ ;$$

(*) Si les coefficiens A_0 et B_0 ou les coefficiens A_m et B_m, ou les uns et les autres avaient un diviseur commun, il suffirait de multiplier par les quotiens obtenus en les divisant par ce diviseur ; le calcul s'en trouverait d'autant simplifié.

équations qui ne sont plus que du $(m-1)^{ième}$ degré seulement par rapport à x. Par l'application réitérée du même procédé on parviendra successivement à des couples d'équations de degrés de moins en moins élevés ; de sorte qu'on arrivera finalement à deux équations du premier degré en x, desquelles on déduira d'abord la valeur de x, sous deux formes différentes, égalant ensuite entre elles les deux valeurs ainsi obtenues, l'équation résultante sera l'équation de relation demandée, et conséquemment l'équation finale en y, si les coefficiens sont des fonctions de cette autre inconnue.

Si, par l'effet de l'abaissement successif des équations, par rapport à x, on parvenait à deux équations d'un certain degré qui fussent exactement les mêmes, on en conclurait que leur premier membre est facteur des premiers membres des proposées. Ce facteur, égalé à zéro, donnerait donc des solutions indéterminées du problème, et, pour en avoir les solutions déterminées, il faudrait délivrer les premiers membres des proposées de leur facteur commun, et opérer sur les équations résultantes comme il a été dit ci-dessus.

Si, pour quelqu'une des valeurs de y, déduites de l'équation finale, les valeurs de x devenaient toutes deux indéterminées, il serait facile d'en conclure que les deux équations du premier degré en x ont l'une et l'autre un facteur commun, fonction de y, que cette valeur rend nul, et qui satisfait ainsi aux deux proposées, quel que soit x. Si enfin en cherchant à rabaisser le degré des proposées par rapport à x, on tombait sur quelque équation absurde, on en conclurait que ces proposées sont incompatibles, et qu'ainsi le problème qui y a conduit est impossible.

Tel est, au fond, le procédé d'élimination exposé par Euler, dans l'endroit cité ; on a dit de ce procédé : 1.° qu'il ne faisait pas voir comment deux équations avaient lieu en même temps, tandis que rien ne semble plus propre à exprimer analytiquement cette circonstance que de combiner ces équations entre elles, comme équations d'un même problème ; 2.° qu'il ne donnait aucune lumière sur les relations entre les valeurs de l'inconnue restée dans l'équation finale et les valeurs correspondantes de l'inconnue éliminée ; et l'on voit qu'au contraire, il donne l'expression de cette dernière en fonction de l'autre sous deux formes différentes ; 3.° enfin qu'il conduisait à une équation finale d'un degré trop élevé, et nous conviendrons qu'à défaut de certaines précautions, il en serait réellement ainsi ; mais, outre qu'on en peut dire autant de la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, nous allons faire voir qu'il est très-aisé ici d'éviter cet inconvénient, et qu'en outre, en rattachant la recherche pour chaque degré aux résultats obtenus pour le degré immédiatement inférieur, le calcul s'exécute sans qu'on ait, pour ainsi dire, d'autre peine que celle d'écrire (*).

Venons présentement aux cas particuliers dans lesquels nous supposerons constamment que les coefficiens sont des fonctions rationnelles et entières de y, des degrés marqués par leurs indices respectifs.

Premier Degré.

Soient les deux proposées du premier degré,

$$\left.\begin{aligned} A_0x+A_1=0\,, \\ B_0x+B_1=0\,; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) En gâtant un peu le procédé d'élimination d'Euler, c'est-à-dire, n'attaquant constamment les équations que par la gauche, ce qui détruirait toute la symétrie des calculs, on le ferait exactement revenir, pour le fond, à celui du plus grand commun diviseur, sur lequel pourtant il conserverait encore l'avantage d'une forme plus commode. On pourrait aussi n'attaquer constamment les équations que par la droite ; on obtiendrait ainsi une nouvelle équation finale dont le plus grand commun diviseur, avec l'équation déduite de l'autre procédé, serait la véritable équation finale delivrée de tout facteur étranger.

elles donnent immédiatement

$$x = -\frac{A_0}{A_0} = -\frac{B_1}{B_0} \; ; \qquad (2)$$

d'où résulte l'équation en y, du premier degré,

$$A_0B_1 - A_1B_0 = 0 \; . \qquad (3)$$

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{array}{ll} C_1x + C_2 = 0 \; , & \text{du } 2.^{\text{me}} \text{ degré} \; , \\ C_2x + C_3 = 0 \; , & \text{du } 3.^{\text{me}} \text{ degré} \; , \end{array}\right\} \quad (4)$$

on aurait, pour la double valeur de x,

$$x = -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{C_3}{C_2} \; ; \qquad (5)$$

et l'équation en y serait

$$C_2{}^2 - C_1C_3 = 0 \; ; \qquad (6)$$

équation qui ne s'élève qu'au quatrième degré seulement.

Deuxième Degré.

Soient les deux proposées du deuxième degré,

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0 \; , \\ B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0 \; ; \end{array}\right\} \quad (7)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_2$ et $-A_2$; en divisant par x la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger,

$$A_0B_1-A_1B_0=C_1\,,\quad A_0B_2-A_2B_0=C_2\,;\quad A_1B_2-A_2B_1=C_3\,;\qquad (8)$$

on retombera précisément sur les équations (4) ; d'où il suit qu'on obtiendra la double valeur de x de l'équation en y, en substituant les valeurs (8) dans les formules (5) et (6) ; on aura donc ainsi, pour la double valeur de x,

$$x=-\frac{A_0B_2-A_2B_0}{A_0B_1-A_1B_0}=-\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_0B_2-A_2B_0}\,;\qquad (9)$$

et pour l'équation en y

$$(A_0B_2-A_2B_0)^2-(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=0\,;\qquad (10)$$

équation du quatrième degré, et qui s'abaisserait au deuxième si B_2 était nul, c'est-à-dire, si la dernière des équations (7) n'était que du premier degré, puisqu'alors tous les termes restans de l'équation (10) seraient divisibles par A_2.

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{array}{ll} C_1x^2+C_2x+C_3=0\,; & \text{du 3.}^{\text{me}}\text{ degré}\,, \\ C_3x^2+C_4x+C_5=0\,, & \text{du 5.}^{\text{me}}\text{ degré}\,, \end{array}\right\}\qquad (11)$$

la double valeur de x deviendrait

$$x=-\frac{C_1C_5-C_3^2}{C_1C_4-C_2C_3}=-\frac{C_2C_5-C_3C_4}{C_1C_5-C_3^2}\,;\qquad (12)$$

et l'équation en y serait

$$(C_3^2-C_1C_5)^2-(C_1C_4-C_2C_3)(C_2C_5-C_3C_4)=0\,;$$

ou bien, en développant et ordonnant par rapport à C_3

$$C_3^4-(C_2C_4+2C_1C_5)C_3^2+(C_1C_4^2+C_2^2C_5)C_3+C_1C_5(C_1C_5-C_2C_4)=0\,;\qquad (13)$$

équation qui ne s'élève qu'au douzième degré seulement, et encore voit-on que si $C_1C_5-C_2C_4$ était divisible par C_3, que si l'on avait, par exemple,

$$C_1C_5-C_2C_4=-C_3D_3\ , \qquad (14)$$

tous ses termes étant alors divisibles par C_3, elle deviendrait

$$C_3{}^3-(C_2C_4+2C_1C_5)C_3+C_1C_4{}^2+C_2{}^2C_5-C_1C_5D_3=0\ ; \quad (15)$$

de manière qu'elle ne s'éleverait plus qu'au neuvième degré.

Troisième Degré.

Soient les deux proposées, du troisième degré,

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0\ , \\ B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3=0\ ; \end{array}\right\} \quad (16)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_3$ et $-A_3$; en divisant par x la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{c} A_0B_1-A_1B_0=C_1\ , \quad A_2B_3-A_3B_2=C_5\ , \\ A_0B_2-A_2B_0=C_2\ , \quad A_1B_3-A_3B_1=C_4\ , \\ A_0B_3-A_3B_0=C_3\ , \\ A_1B_2-A_2B_1=D_3\ , \end{array}\right\} \quad (17)$$

d'où

$$C_1C_5-C_2C_4=(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_3-A_3B_1)\ ;$$

ou, en développant, réduisant et décomposant,

$$C_1C_5-C_2C_4=-(A_0B_3-A_3B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=-C_3D_3\ ;$$

elles deviendront précisément les équations (11), avec la condition (14); d'où il suit qu'on obtiendra la double valeur de x et l'équation en y, en substituant les valeurs (17) dans les formules (12) et (15); on aura ainsi, pour la double valeur de x,

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)^2}{(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_3-A_3B_1)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_0B_3-A_3B_0)}\ ,\\ &=-\frac{(A_0B_2-A_2B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)(A_1B_3-A_3B_1)}{(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)^2}\ ;\end{aligned}\right\}(18)$$

et pour l'équation en y

$$\left.\begin{gathered}(A_0B_3-A_3B_0)^3\\ -\{(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_3-A_3B_1)+2(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)\}(A_0B_3-A_3B_0)\\ +(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_3-A_3B_1)^2+(A_2B_3-A_3B_2)(A_0B_2-A_2B_0)^2\\ -(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_2-A_2B_1)(A_2B_3-A_3B_2)=0\ ,\end{gathered}\right\}(19)$$

qui ne s'élève qu'au neuvième degré, comme cela doit être.

Si l'on suppose B_3 nul, c'est-à-dire, si l'on suppose que la dernière des équations (16) n'est que du second degré, tous les termes restans, dans l'équation (19), se trouvant divisibles par A_3, cette équation ne s'élevera plus qu'au sixième degré seulement. Si, ensuite, on suppose que B_2 est nul aussi, c'est-à-dire, si l'on suppose que la dernière des équations (16) n'est que du premier degré, tous les termes restans dans la nouvelle équation seront encore divisibles par A_3, de sorte qu'elle ne s'élèvera plus alors qu'au troisième degré.

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{array}{ll} C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4=0\ , & \text{du } 4.^{\text{me}} \text{ degré}\ , \\ C_4x^3+C_5x^2+C_6x+C_7=0\ , & \text{du } 7.^{\text{me}} \text{ degré}\ , \end{array}\right\}\quad(20)$$

la double valeur de x deviendrait

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)}{(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_7-C_4C_5)-(C_1C_6-C_3C_4)(C_1C_2-C_4^2)}\ ; \\ \quad=-\dfrac{(C_1C_6-C_3C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)(C_2C_7-C_4C_5)}{(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)}\ ; \end{array}\right\}\quad(21)$$

et l'équation en y serait

$$\begin{array}{c} (C_1C_7-C_4^2)^3 \\ -\{(C_1C_6-C_3C_4)(C_2C_7-C_4C_5)+2(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6\}(C_1C_7-C_4^2) \\ +(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_7-C_4C_5)^2+(C_3C_7-C_4C_6)(C_1C_6-C_3C_4)^2 \\ -(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_6-C_3C_5)(C_3C_7-C_4C_6)=0\ ; \end{array}$$

ou bien, en développant et ordonnant par rapport à C_4,

$$\left.\begin{array}{c} C_4^6-(C_3C_5+C_2C_6+3C_1C_7)C_4^4+(C_2C_5^2+3C_1C_5C_6+3C_2C_3C_7+C_3^2C_6)C_4^3 \\ +\{3C_1^2C_7^2-2(C_1C_3C_6^2+C_2^2C_5C_7)-(C_1C_5^3+C_3^3C_7)+(C_2C_6+C_1C_7)(C_2C_6-C_3C_5)\}C_4^2 \\ +\{C_1(C_6^2-2C_5C_7)(C_1C_6-C_2C_5)-(C_1C_5C_6+C_2C_3C_7)(C_1C_7-C_3C_5)+C_7(C_2^2-2C_1C_3)(C_2C_7-C_3C_6)\}C_4 \\ -C_1C_7\{(C_1C_7-C_3C_5)^2-(C_1C_6-C_2C_5)(C_2C_7-C_3C_6)\}=0\ ; \end{array}\right\}\quad(22)$$

équation qui ne s'élève qu'au vingt-quatrième degré seulement, et encore voit-on que, si chacun des trois binomes,

$$C_1C_6-C_2C_5\ ,\qquad C_1C_7-C_3C_5\ ,\qquad C_2C_6-C_3C_5\ ,$$

était divisible par C_4, que si l'on avait, par exemple,

$$C_1C_6-C_2C_5=-C_4D_3\,,\quad C_1C_7-C_3C_5=-C_4D_4\,,\quad C_2C_7-C_3C_6=-C_4D_5\,,\qquad (23)$$

tous ses termes étant alors divisibles par C_4^2, elle deviendrait simplement

$$\left.\begin{array}{c} C_4^4-(C_3C_5+2C_2C_6+3C_1C_7)C_4^2+(C_2C_5^2+3C_1C_5C_6+3C_2C_3C_7+C_3^2C_6)C_4 \\ +\{3C_1^2C_7^2-2(C_1C_3C_6^2+C_2^2C_5C_7)-(C_1C_5^3+C_3^3C_7)+(C_2C_6+C_1C_7)(C_2C_6-C_3C_5)\} \\ -\{C_1(C_6^2-2C_5C_7)D_3-(C_1C_5C_6+C_2C_3C_7)D_4+C_7(C_2^2-2C_1C_3)D_5\} \\ -C_1C_7(D_4^2-D_3D_5)=0\,; \end{array}\right\}\quad (24)$$

de manière qu'elle ne s'éleverait plus qu'au seizième degré.

Quatrième Degré.

Soient encore les deux proposées du quatrième degré

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0\,, \\ B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2+B_3x+B_4=0\,; \end{array}\right\}\quad (25)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_4$ et $-B_4$; en divisant par x la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger

$$\left.\begin{array}{c} A_0B_1-A_1B_0=C_1\,,\quad A_3B_4-A_4B_3=C_7\,, \\ A_0B_2-A_2B_0=C_2\,,\quad A_2B_4-A_4B_2=C_6\,, \\ A_0B_3-A_3B_0=C_3\,,\quad A_1B_4-A_4B_1=B_5\,, \\ A_0B_4-A_4B_0=C_4\,, \\ A_1B_2-A_2B_1=D_3\,,\ A_1B_3-A_3B_1=D_4\,,\ A_2B_3-A_3B_2=B_5\,; \end{array}\right\}\quad (26)$$

d'où résulte

$$C_1C_6-C_2C_5=(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_4-A_4B_2)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_4-A_4B_1)\ ;$$

$$C_1C_7-C_3C_5=(A_0B_1-A_1B_0)(A_3B_4-A_4B_3)-(A_0B_3-A_3B_0)(A_1B_4-A_4B_1)\ ,$$

$$C_2C_7-C_3C_6=(A_0B_2-A_2B_0)(A_3B_4-A_4B_3)-(A_0B_3-A_3B_0)(A_2B_4-A_4B_2)\ ;$$

ou , en développant , reduisant et décomposant ,

$$C_1C_5-C_2C_5=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=-C_4D_3\ ;$$

$$C_1C_7-C_3C_5=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_1B_3-A_1B_2)=-C_4D_4\ ;$$

$$C_2C_7-C_3C_6=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_2B_3-A_3B_2)=-C_4D_5\ ;$$

elles deviendront précisément les équations (20) , avec les conditions (23) ; on obtiendra donc la double valeur de x et l'équation en y en mettant les valeurs (26) dans les formules (21) et (24) ; et l'on voit que l'équation en y ne sera que du seizième degré seulement.

A l'exemple d'Euler , nous ne pousserons pas plus loin ces recherches qui n'exigent , comme on le voit , que la peine d'écrire. En comparant notre marche à la sienne , on verra aisément combien il aurait pu s'épargner de calculs.

Comme l'équation en y se complique de plus en plus , à mesure que le degré des proposées devient plus élevé , il en devient d'autant plus facile aussi qu'il s'y glisse des erreurs ; et c'est un motif pour désirer d'obtenir , sur les diverses conditions auxquelles cette équation doit satisfaire , quelques lumières qui puissent aider à découvrir les méprises qu'on aurait pu commettre en l'écrivant. C'est un sujet sur lequel nous nous arrêterons d'autant plus volontiers que les auteurs d'élémens ne s'en sont guère occupés , bien qu'il soit d'une assez haute importance pour qui aspire à exécuter sûrement des calculs tant soit peu compliqués.

Reprenons donc les deux équations générales :

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=0\ , \\ B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ; \end{array}\right\}(\alpha)$$

la première remarque qui se présente est qu'en y changeant A en B et B en A, on a toujours le même problème à résoudre; d'où il suit évidemment que l'équation en y doit être de telle forme qu'on y puisse impunément opérer une semblable permutation.

Ces deux équations peuvent être écrites comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} A_m\left(\frac{1}{x}\right)^m+A_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}+A_{m-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2}+\ldots+A_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+A_1\left(\frac{1}{x}\right)+A_0=0\ , \\ B_m\left(\frac{1}{x}\right)^m+B_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}+B_{m-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2}+\ldots+B_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+B_1\left(\frac{1}{x}\right)+B_0=0\ ; \end{array}\right\}(\beta)$$

or, il revient évidemment au même d'éliminer x entre les équations (α), ou d'éliminer $\frac{1}{x}$ entre les équations (β) ; donc le résultat de la première des deux éliminations doit être tel que les coefficiens également distants des extrêmes, dans les équations (α), y jouent exactement le même rôle, de manière à pouvoir y être permutés entre eux sans qu'il en résulte aucun changement ; ce qui revient à dire, en d'autres termes, que l'équation en y doit être telle qu'on y puisse impunément remplacer simultanément les indices de A et B par leurs complémens à m.

Si, dans les équations (α) on suppose que x représente un nombre purement abstrait, cela ne devra rien changer à la forme de l'équation finale, où cette lettre n'entre plus ; mais alors tous les coefficiens, sous peine d'absurdité, devront être homogènes ; de telle sorte que si, par exemple, A_0 représente une longueur et B_0 un intervalle de temps, tous les coefficiens de la première équation exprimeront des longueurs, et tous ceux de la seconde des intervalles de temps ; donc aussi, sous peine d'absurdité, il faudra que tous les termes de l'équation en y soient de mêmes dimensions, soit en A soit en B ; à plus forte raison cette équation sera-t-elle homogène par rapport aux lettres qui la composeront (*).

Supposons présentemont que, dans les équations (α), x soit le symbole d'une longueur, et que A_0 et B_0 soient des symboles de nombres abstraits ; il faudra alors, sous peine d'absurdité, que chacun des autres coefficiens exprime un produit d'autant de longueurs qu'il y a d'unités dans son indice ; d'où il suit que l'équation en y devra, sous peine d'une pareille absurdité, être homogène, non seulement par rapport à ses lettres, comme nous venons tout à l'heure de le remarquer, mais aussi par rapport aux indices de ces mêmes lettres dont la somme devra ainsi être la même dans chacun de leurs termes.

Quant aux deux valeurs de x, fonctions des coefficiens ; les mêmes considérations prouvent qu'elles devront être telles, 1.° qu'elles restent les mêmes en y changeant les A en B et les B en A, sans toucher aux indices ; 2.° qu'en y remplaçant chaque indice par son complément à m, leur numérateur se change en leur dénominateur, et *vice versâ* ; 3.° que ce numérateur et ce dénominateur soient des polynomes homogènes, tant par rapport aux lettres que par rapport aux indices de ces lettres ; 4.° qu'enfin les numérateurs soient, par rapport aux lettres,

---

(*) C'est dans cette vue que nous avons donné aux premiers termes de nos équations des coefficiens, qu'autrement nous aurions bien pu, sans leur rien faire perdre de leur généralité, supposer égaux à l'unité. Nous en usons constamment de même, dans tous les cas analogues, et notamment lorsqu'il s'agit d'exprimer une courbe et une surface par une équation entre ses coordonnées.

de mêmes dimensions que les dénominateurs, et, par rapport aux indices, d'une dimension supérieure d'une unité (*).

Telles sont donc les conditions générales les plus remarquables auxquelles doivent satisfaire, dans tous les cas, tant l'équation qui résultera de l'élimination de x entre les deux proposées, que les valeurs de cette inconnue, fonctions des coefficiens de ces équations. Ce sont là tout autant de points de reconnaissance à l'aide desquels il sera bien difficile qu'une erreur de calcul puisse passer sans être aperçue. A la vérité, des résultats pourraient bien, en toute rigueur, satisfaire à ces diverses conditions sans être exacts; mais, à coup sûr, ceux qui manqueraient de satisfaire à une seule d'entre elles ne le seraient pas.

Nous terminerons par montrer brièvement comment le procédé d'élimination d'Euler pourrait être facilement étendu à un nombre quelconque d'équations entre un pareil nombre d'inconnues; soient les trois équations d'un même degré quelconque en x

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}+A_m=0\ ;$$

(*) Beaucoup de gens, parmi ceux-là même qui passent pour habiles, pourront trouver tout ceci inintelligible si, même, ils ne le trouvent pas inepte; cela prouvera seulement que, s'ils ont poussé l'art assez loin, ils ne possèdent pas encore la science. Ils invoqueront peut-être contre la loi des homogènes, sur laquelle nous nous appuyons ici, l'autorité de M. Legendre qui a remarqué, dans ses Élémens de géométrie, qu'au moyen d'unités arbitraires, toute quantité concrète était réductible à un nombre abstrait, ce qui est très-vrai; mais, outre qu'en ces matières, l'autorité ne saurait être d'aucun poids, M. Legendre sait mieux que personne à quoi se réduiraient ses élégantes démonstrations par l'algorithme fonctionnel, si la loi des homogènes n'était point admise.

$$B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ;$$

$$C_0x^m+C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+\ldots\ldots+C_{m-2}x^2+C_{m-1}x+C_m=0\ ;$$

dans lesquelles ont peut supposer, si l'on veut, que les coefficiens sont des fonctions rationnelles et entières de deux autres inconnues y et z des degrés marqués par leurs indíces respectifs. Le problème de l'élimination consiste ici à déduire de ces trois équations, en les combinant entre elles, d'une manière convenable, 1.° une valeur rationnelle de x, fonction de leurs coefficiens, c'est-à-dire, fonctions des deux autres inconnues y et z; 2.° deux équations de relation entre ces mêmes coefficiens, c'est-à-dire, entre x et y seulement ; car, dès lors, le problème se trouve ramené au cas de deux équations entre deux inconnues, c'est-à-dire, au cas qui nous a occupé jusqu'ici.

On prescrit ordinairement, pour cela, de combiner, tour à tour, une quelconque des équations proposées avec chacune des deux autres, comme nous l'avons fait dans tout ce qui précède ; et l'on a soin d'observer aussitôt que le double emploi que l'on fait arbitrairement de l'une des trois équations, et le défaut de symétrie qui en résulte, a pour effet inévitable d'élever le degré des équations résultantes plus que ne le comporte la nature du problème.

Mais c'est bien gratuitement que l'on fait un double emploi de l'une des équations proposées ; on peut très-aisément parvenir au but en les traitant toutes trois de la même manière ; et on a même alors l'avantage de rabaisser leur degré de deux unités à chaque opération nouvelle. Si, en effet, on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs

1.° par $B_0C_1-B_1C_0$, $C_0A_1-C_1A_0$; $A_0B_1-A_1B_0$;

2.° par $B_0C_m-B_mC_0$, $C_0A_m-C_mA_0$, $A_0B_m-A_mB_0$,

3.° par $B_{m-1}C_m-B_mC_{m-1}$, $C_{m-1}A_m-C_mA_{m-1}$; $A_{m-1}B_m-A_mB_{m-1}$;

en divisant la seconde des équations résultantes par x et la troisième par x^2, elles prendront aussitôt la forme

$$D_3x^{m-2}+D_4x^{m-3}+\dots\dots\dots+D_mx+D_{m+1}=0\ ;$$

$$D_{m+1}x^{m-2}+D_{m+2}x^{m-3}+\dots\dots+D_{2m-2}x+D_{2m-1}=0\ ;$$

$$D_{2m-1}x^{m-2}+D_{2m}x^{m-3}+\dots\dots+D_{3m-2}x+D_{3m-1}=0\ ;$$

en opérant de la même manière sur celles-ci, on en déduira trois autres du $(m-4)^{ieme}$ degré en x, et ainsi de suite ; de sorte que, si les proposées sont de degré impair, on tombera finalement sur trois équations du premier degré, desquelles on déduira la valeur de x sous trois formes différentes qui, égalées entre elles, donneront en outre la double équation demandée en y et z.

Si les proposées sont de degrés pairs, le même calcul conduira à trois équations où x n'entrera plus qu'au second degré seulement. Soient ces trois équations

$$Px^2+Qx+R=0\ ;$$

$$P'x^2+Q'x+R'=0\ ;$$

$$P''x^2+Q''x+R''=0\ ;$$

d'abord, en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$P'Q''-P''Q'\ ,\qquad P''Q-PQ''\ ,\qquad PQ'-P'Q\ ,$$

on obtiendra cette première équation, en y et z seulement,

$$PQ'R''-PR'Q''+RP'Q''-QP'R''+QR'P''-RQ'P''=0\ .$$

Prenant ensuite, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs

1.° par $P'-P''$, $P''-P$, $P-P'$,

2.° par $R'-R''$, $R''-R$, $R-R'$;

et divisant par x la dernière des équations résultantes, il viendra

$$\{Q(P'-P'')+Q'(P''-P)+Q''(P-P')\}x+\{R(P'-P'')+R'(P''-P)+R''(P-P')\}=0\,;$$

$$\{P(R'-R'')+P'(R''-R)+P''(R-R')\}x+\{Q(R'-R'')+Q'(R''-R)+Q''(R-R')\}=0\,;$$

équations qui donneront de x deux expressions différentes qui, égales entre elles, formeront la seconde équation en y et z.

Si les équations étaient au nombre de quatre, entre quatre inconnues, les multiplicateurs devraient être de six termes chacun ; mais aussi, à chaque opération, le degré de ces équations se trouverait abaissé de trois unités. Les multiplicateurs devraient être de vingt-quatre termes chacun, s'il s'agissait de cinq équations entre cinq inconnues ; et, à chaque opération, le degré de ces équations se trouverait abaissé de quatre unités, et ainsi de suite. Tout cela ressort manifestement de la théorie développée à la pag. 148 du IV.me volume du présent recueil, théorie qu'on n'avait point encore songé à étendre à l'élimination dans les degrés supérieurs. A la vérité, malgré cette manière de procéder, les résultats se trouveront encore compliqués de facteurs étrangers ; mais ici, comme dans le cas de deux inconnues, ces facteurs se reconnaîtront très-aisément.

Cramer est le premier qui ait reconnu la loi de construction des valeurs des inconnues, dans les équations du premier degré, et l'on a pu voir, à l'endroit que nous venons de citer, combien la généralité de cette loi est facile à démontrer. Peut-être un jour parviendra-t-on aussi à découvrir la loi qui préside à la formation des valeurs des inconnues dans les équations des degrés supérieurs.

Nous nous estimerions heureux si les considérations qui précèdent pouvaient tendre à rendre un peu moins lointaine l'époque de cette importante découverte.