
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BARY

**Géométrie élémentaire. Note sur la détermination du volume
du segment sphérique à deux bases parallèles**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 326-328

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__326_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1830-1831, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la détermination du volume du segment sphérique à deux bases parallèles ;

Par M. B A R Y.



POUR fixer les idées , supposons que les deux bases du segment à mesurer soient situées du même côté du grand cercle dont le plan leur est parallèle. Soient a la plus grande base , p la distance de son plan au centre de la sphère , b la plus petite base , q la distance de son plan au centre de la sphère , r le rayon de cette sphère ; nous aurons d'abord

$$r^2 = a^2 + p^2 = b^2 + q^2 , \quad (1)$$

d'où nous tirerons encore

$$a^2 - b^2 = q^2 - p^2 = (p+q)(q-p) ;$$

de sorte qu'en nommant h la hauteur du segment , ce qui donnera

$$q-p=h , \quad (2)$$

nous aurons

$$a^2 - b^2 = (p+q)h ,$$

et , conséquemment ,

$$p+q = \frac{a^2 - b^2}{h} , \quad (3)$$

et alors les équations (2) et (3) donneront

$$p = \frac{a^2 - b^2}{2h} - \frac{h}{2} , \quad q = \frac{a^2 - b^2}{2h} + \frac{h}{2} . \quad (4)$$

Cela posé , soit V le volume du segment ; ce segment est la différence de deux autres , ayant pour base commune le grand cercle parallèle à ses bases et se terminant à ses mêmes bases , et dont les hauteurs sont conséquemment q et p . Soient Q et P respectivement les volumes de ces deux segmens , nous aurons

$$V = Q - P . \quad (5)$$

Les deux segmens Q et P sont respectivement composés de deux cônes ayant b et a pour rayons de leurs bases et q et p pour hauteurs et de deux secteurs terminés par des zones sphériques dont les hauteurs sont également q et p ; de sorte qu'on a

$$Q = \frac{1}{3} \pi b^2 q + \frac{2}{3} \pi r^2 q , \quad P = \frac{1}{3} \pi a^2 p + \frac{2}{3} \pi r^2 p ,$$

ou bien (1)

$$Q = \frac{1}{3} \pi b^2 q + \frac{2}{3} \pi (b^2 + q^2) q = \pi b^2 q + \frac{2}{3} \pi q^3 ,$$

$$P = \frac{1}{3} \pi a^2 p + \frac{2}{3} \pi (a^2 + p^2) p = \pi a^2 p + \frac{2}{3} \pi p^3 ,$$

328 VOLUME DU SEGMENT A DEUX BASES.

ce qui donnera , en substituant dans (5) ,

$$V = \pi(b^2q - a^2p) + \frac{2}{3}\pi(q^3 - p^3) = \pi(b^2q - a^2p) + \frac{2}{3}\pi(q-p)(p^2 + pq + q^2);$$

c'est-à-dire (2) ,

$$V = \pi(b^2q - a^2p) + \frac{2}{3}\pi h(p^2 + pq + q^2) . \quad (6)$$

Mais les valeurs (4) donnent

$$b^2q - a^2h = \frac{(a^2 + b^2)h}{2} - \frac{(a^2 - b^2)^2}{2h} ;$$

$$p^2 + pq + q^2 = \frac{3(a^2 - b^2)^2}{4h^3} + \frac{h^2}{4} ;$$

substituant ces valeurs dans (6) et réduisant , il viendra finalement

$$V = h \frac{\pi a^2 + \pi b^2}{2} + \frac{1}{6}\pi h^3 ,$$

qui est précisément le résultat donné par M. Legendre.

Si , du volume de ce segment , on retranche le volume du tronc du cône qui se termine à ses deux bases , lequel a , comme l'on sait , pour expression

$$\pi \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) ,$$

on obtiendra , pour le volume du corps engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre qui lui est extérieur ,

$$\frac{\pi h}{6} \{ (a-b)^2 + h^2 \} .$$

Mais , si l'on représente par c la corde du segment générateur , on aura

$$(a-b)^2 + h^2 = c^2 ,$$

ce qui donnera , en substituant , pour le volume cherché ,

$$\frac{\pi h c^2}{6} ;$$

expression remarquable par sa simplicité.