ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BARY

Géométrie analytique. Exposition d'une méthode élémentaire propre à obtenir les équations des développées orthogonales et obliques des courbes planes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 249-262

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__249_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Exposition d'une méthode élémentaire propre à obtenir les équations des développées orthogonales et obliques des courbes planes ;

Par M. Bary.

Si l'on conçoit qu'une droite indéfinie se meuve sur le plan d'une courbe, de manière à lui rester constamment normale, cette droite, dans son mouvement, demeurera constamment tangente à une autre courbe qui sera ce qu'on appelle la *développée* de la première.

On peut aussi concevoir une autre droite indéfinie, suivant la première dans son mouvement, de manière à couper la courbe proposée aux mêmes points qu'elle, et à faire avec elle, toujours d'un même côté, un angle constant ou un angle variable suivant une loi mathématique donnée quelconque. Cette seconde droite sera, dans son mouvement, comme la première, tangente à une certaine courbe qui pourra être également considérée comme une sorte de développée de la proposée, et qui paraît avoir été considérée pour la première fois (*Annales*, tom. XX, pag. 97), pār M. Lambert qui, pour distinguer les unes des autres ces deux sortes de développées, a appelé, celles de la première, sorte des *développées orthogonales*, et celles de la seconde, des *développées obliques* ; d'où l'on voit qu'une courbe plane proposée ne saurait avoir qu'une seule développée orthogonale, tandis qu'elle peut avoir une infinité de développées obliques différentes.

On a ramené, depuis long-temps, à des procédés élémentaires la recherche des tangentes et des normales aux courbes, soit par des points donnés sur leur périmètre, soit par des points extérieurs ; mais il n'en est pas de même des développées orthogonales ou obliques, dont jusqu'ici, malgré leur importance dans la géométrie et dans ses applications à la physique, on a toujours fait dépendre la recherche des procédés de la haute analyse ; de sorte que les personnes qui, après avoir suivi les cours de mathématiques de nos colléges, n'ont ensuite ni le loisir ni l'occasion de s'élever jusqu'à l'étude du calcul différentiel, se trouvent ainsi condamnées à rester, pour jamais, étrangères à tout ce qui concerne cette branche importante de la science.

Nous croyons donc faire une chose utile en montrant avec quelle facilité on peut présenter la théorie des développées, soit orthogonales soit obliques, de manière à l'introduire dans les simples élémens. Nous exposerons d'abord le procédé général ; nous en ferons ensuite diverses applications.

Concevons que, par un quelconque (x',y') des points d'une courbe plane, on mène une normale à cette courbe ; si, par un autre point quelconque de cette courbe, on lui mène une nouvelle normale, celle-ci, en général, coupera la première en un certain point (α,β). La première normale étant supposée fixe, si la seconde marche vers elle, en demeurant constamment normale à la courbe, le point (α,β) marchera sur cette normale fixe jusqu'à ce qu'enfin les deux normales venant à se confondre, ce point (α,β) s'arrêtera sur la normale fixe, dans une certaine situation, et il est manifeste qu'alors il appartiendra à la développée de la courbe proposée.

Ainsi, à chaque point (x',y') de la courbe donnée, répond un certain point (α,β) de sa développée, situé sur la normale à cette courbe en (x',y') ; tout comme, à chaque point (α,β) de la développée doit répondre un point (x',y') de la courbe proposée, intersection de cette courbe avec la tangente à cette développée en ce point (α,β) ; de sorte que l'un quelconque de ces deux points est nécessairement déterminé par l'autre.

Si l'on conçoit présentement que la normale fixe au point (x', y'), devenue mobile, marche sur la courbe, en lui restant constamment normale, le point (α,β) marchera sur elle, et décrira précisément la développée demandée. Il ne s'agit donc, pour obtenir l'équation de cette développée, que d'imiter, par l'analyse, cette construction mécanique.

Soit supposée

$$F(x,y)=0\,, \qquad (1)$$

l'équation de la courbe dont il s'agit; pour le point (x',y') on aura

$$F(x',y')=0\;; \qquad (2)$$

l'équation de la normale, en ce point, sera de la forme

$$f(x,y,x',y')=0\;. \qquad (3)$$

Si l'on veut que cette normale passe par un point donné $(\alpha\,;\,\beta)$, on exprimera cette condition en écrivant

$$f(\alpha,\beta,x',y')=0\;; \qquad (4)$$

équation qui, combinée avec l'équation (2), donnera les pieds (x',y') de toutes les normales issues du point (α,β).

Au lieu de résoudre les deux équations (2) et (4), par rapport à x' et y', on peut, dans l'une et dans l'autre, considérer ces deux coordonnées comme variables, et construire pour les mêmes axes, les deux courbes qu'elles expriment. Les intersections de ces deux courbes seront également les pieds (x',y') de toutes les normales issues du point (α,β).

Or, la première de ces deux courbes est la courbe proposée elle-même ; d'où il résulte que l'équation (4) est celle d'une certaine courbe qui coupe la proposée aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées du point (α, β).

Si présentement deux de ces normales viennent à se confondre, d'après ce qui a été dit ci-dessus, le point (α, β) deviendra un de ceux de la développée. Or, pour que ces deux normales se confondent en effet, il est nécessaire que deux des points d'intersection des courbes (2) et (4) se confondent en un seul, ou, ce qui revient au même que ces deux courbes se touchent et aient conséquemment la même tangente au point (x', y'). Cherchant donc les équations des tangentes aux deux courbes

$$\mathrm{F}(x,y)=0\ , \qquad \mathrm{f}(\alpha,\beta,x,y)=0\ ,$$

au point (x', y'), et écrivant que ces deux tangentes se confondent, leur coïncidence entraînera deux conditions de la forme

$$\varphi(x',y',\alpha,\beta)=0\ , \qquad \psi(x',y',\alpha,\beta)=0\ ;$$

lesquelles, comme nous l'avons dit ci-dessus, donneront indistinctement α et β en x', y', ou x', y' en α et β. Si, en particulier, on en tire les valeurs de x' et y', en α et β, pour les substituer dans l'équation (2), l'équation résultante, en α et β, sera l'équation cherchée de la développée de la courbe (1). On pourra d'ailleurs, chemin faisant, employer les relations (2) et (4) à simplifier les calculs et leurs résultats.

Voilà pour ce qui concerne les développées orthogonales. Si, au contraire, il s'agissait de développées obliques, il n'y aurait d'autre changement à faire dans le procédé que celui de remplacer l'équation (3) de la normale au point (x', y') par celle d'une droite passant par le même point et faisant avec elle un angle égal à l'angle, constant ou variable, requis par les conditions du problème.

Pour première application de ce procédé, cherchons l'équation de la développée de l'ellipse donnée par l'équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \; ; \qquad (1)$$

L'équation de la normale à cette ellipse au point (x', y') sera, comme l'on sait, en posant, pour abréger, $a^2-b^2=c^2$,

$$b^2x'y-a^2y'x+c^2x'y'=0 \;, \qquad (3)$$

sous la condition

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2 \; ; \qquad (2)$$

On exprimera que cette normale contient le point (α, β) en écrivant

$$b^2\beta x'-a^2\alpha y'+c^2x'y'=0 \; ; \qquad (4)$$

de sorte que les pieds de toutes les normales issues du point (α, β) seront les intersections de la courbe (1) avec la courbe donnée par l'équation

$$b^2\beta x-a^2\alpha y+c^2xy=0 \; .$$

Les équations des tangentes à ces deux courbes au point (x', y') sont

$$b^2x'x+a^2y'y=a^2b^2 \;,$$

$$(c^2y'+b^2\beta)x+(c^2x'-a^2\alpha)y=c^2x'y' \;,$$

sous les conditions (2) et (4).

Pour exprimer que ces deux tangentes se confondent en une seule et même ligne droite, il faudra écrire

$$\frac{x'}{a^2}=\frac{c^2y'+b^2\beta}{c^2x'y'} \;, \qquad \frac{y'}{b^2}=\frac{c^2x'-a^2\alpha}{c^2x'y'} \; ;$$

équations qui donneront α et β en x' et y', et réciproquement. Mais la relation (4) donne

$$c^2y'+b^2\beta=\frac{a^2\alpha y'}{x'}\ ,\qquad c^2x'-a^2\alpha=-\frac{b^2\beta x'}{y'}\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{x'}{a^2}=+\frac{a^2\alpha}{c^2x'^2}\ ,\qquad \frac{y'}{b^2}=-\frac{b^2\beta}{c^2y'^2}\ ;$$

équations plus simples desquelles on tire

$$x'=a\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\ ,\qquad y'=-b\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la relation (2), et reduisant,

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ ;$$

équation connue de la développée de l'ellipse dans laquelle α et β sont les coordonnées courantes.

En changeant ces coordonnées en x et y, et en posant en outre

$$c^2=aa'=bb'\ ,$$

a' et b' étant deux nouvelles longueurs, cette équation prend la forme

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ ;$$

ce qui offre un rapprochement remarquable entre l'équation de la développée d'une ellipse et celle de cette courbe qui peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 .$$

Pour deuxième application nous choisirons une classe de développées obliques dont l'étude est indispensable au physicien ; savoir : les *caustiques par réflexion*.

Nous supposerons que des rayons de lumière parallèles à une droite fixe, tracée sur le plan d'un cercle, viennent rencontrer la circonférence de ce cercle, contre laquelle ils se réfléchissent en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence ; et nous chercherons à quelle courbe les rayons ainsi réfléchis sont tangens.

Soit r le rayon du cercle réflecteur, plaçons à son centre l'origine des coordonnées rectangulaires en dirigeant l'axe des x parallèlement à la direction commune des rayons incidens. En prenant (x', y') pour un point incident quelconque, nous aurons

$$x'^2+y'^2=r^2 , \qquad (2)$$

On trouvera aisément ensuite, pour l'équation du rayon réfléchi qui répond à ce point,

$$(x'^2-y'^2)(y-y')=2x'y'(x-x') ;$$

ou bien, en simplifiant, au moyen de la relation (2)

$$2x'y'.x-(x'^2-y'^2)y=r^2y' . \qquad (3)$$

Si l'on veut que ce rayon réfléchi passe par un point donné (α, β), on devra avoir

$$2\alpha x'y'-\beta(x'^2-y'^2)=r^2y' ; \qquad (4)$$

de sorte que l'équation

$$2\alpha xy-\beta(x^2-y^2)=r^2y\ ,$$

est celle d'une courbe qui coupe le cercle donné aux points d'incidence de tous les rayons qui, après leur réflexion à la rencontre de ce cercle, vont concourir au point (α,β).

Les équations des tangentes à ces deux courbes, par le point (x',y'), sont

$$x'x+y'y=r^2\ ,$$

$$2(\alpha y'-\beta x')x+(2\alpha x'+2\beta y'-r^2)y=r^2y'\ .$$

Pour exprimer que ces deux droites se confondent en une seule, il faudra écrire

$$x'=\frac{2(\alpha y'-\beta x')}{y'}\ ,\qquad y'=\frac{2\alpha x'+2\beta y'-r^2}{y'}\ ;$$

équations qui donneront α et β par x' et y', et réciproquement.

En les résolvant par rapport à α et β, on trouve

$$\alpha=\frac{2x'y'^2+r^2x'}{2r^2}\ ,$$

$$\beta=\frac{r^2y'-y'(x'^2-y'^2)}{2r^2}=\frac{y'(r^2-x'^2)+y'^3}{2r^2}=\frac{2y'^3}{2r^2}=\frac{y'^3}{r^2}\ ;$$

il en résulte, en faisant usage de la relation (2),

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{4y'^4(x'^2+y'^2)+4r^2x'^2y'^2+r^4x'^2}{4r^4}=\frac{4y'^2(x'^2+y'^2)+r^2x'^2}{4r^2}\ ,$$

ou encore

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{4y'^2+x'^2}{4}=\frac{3y'^2+r^2}{4}\ ;$$

donc

$$4(\alpha^2+\beta^2)-r^2=3y'^2 \ ,$$

et, par suite,

$$\{4(\alpha^2+\beta^2)-r^2\}^3=27y'^6 \ ;$$

mais, de la valeur de β, on tire

$$y'^6=r^4\beta^2 \ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\{4(\alpha^2+\beta^2)-r^2\}^3=27r^4\beta^2 \ ;$$

ou bien, en changeant respectivement α et β en x et y,

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27r^4y^2 \ ;$$

équation exactement la même que celle qui a été trouvée par M. de St.-Laurent, à la pag. 18 du XVII.me volume du présent recueil, pour celle de la caustique par réflexion dans le cercle, et de laquelle on tirera les mêmes conséquences.

La théorie des racines égales peut quelquefois simplifier les recherches qui nous occupent. Pour en donner un exemple, cherchons à quelle courbe sont tangentes les droites menées par tous les points d'une parabole, de manière à faire, dans le même sens, des angles constans avec les normales en ces mêmes points. Soit l'équation de la parabole dont il s'agit

$$y^2=2px \ , \qquad (1)$$

on aura, pour un quelconque (x', y') de ses points,

$$y'^2=2px' \ . \qquad (2)$$

L'équation de la normale en ce point sera, comme l'on sait,

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x') .$$

Si l'on désigne par t la tangente tabulaire de l'angle constant que fait l'oblique avec la normale en chacun des points de la courbe, et par T la tangente tabulaire de l'angle variable que fait cette même oblique avec l'axe des x, on aura

$$\frac{-\frac{y'}{p}-T}{1-T\frac{y'}{p}}=t \; ; \qquad \text{d'où} \qquad T=\frac{pt+y'}{ty'-p} \; ;$$

de sorte que l'équation de l'oblique sera

$$y-y'=\frac{pt+y'}{ty'-p}(x-x') . \qquad (3)$$

Soit (α, β) un point par lequel cette oblique doive passer, on aura

$$\beta-y'=\frac{pt+y'}{ty'-p}(\alpha-x') \; ; \qquad (4)$$

de sorte que l'équation

$$(ty-p)(y-\beta)-(pt+y)(x-\alpha)=0 \; ; \qquad (5)$$

sera celle d'une courbe coupant la proposée (1) en tous les points où elle est rencontrée par les obliques issues du point (α, β), sous les conditions données.

On pourrait présentement achever le calcul comme dans les exemples précédens; mais ici, où, dans l'équation (1), x ne se trouve qu'à la première puissance, il est plus court d'en tirer la valeur pour la substituer dans cette dernière, ce qui conduira à l'équation suivante, du troisième degré en y,

$$y^3-pty^2+2p(t\beta-\alpha+p)y-2p^2(\beta+t\alpha)=0 .$$

On voit par là que, généralement parlant, on peut, d'un même point (α, β) du plan de la parabole, mener à cette courbe trois obliques qui remplissent les conditions prescrites. Mais, si ce point est un des points de la développée oblique demandée, deux de ces obliques se confondront en une seule ; de sorte que l'équation ci-dessus devra avoir deux racines égales. Or, on sait que, pour qu'une équation du troisième degré, telle que

$$ay^3+by^2+cy+d=0 ,$$

ait deux racines égales, il faut qu'on ait

$$4(b^2-3ac)(c^2-3bd)-(bc-gad)^2=0 ;$$

appliquant donc cette condition à la formule ci-dessus, il viendra

$$4\{p^2t^2-6p(t\beta-\alpha+p)\}\{4p^2(t\beta-\alpha+p)^2-6p^3t(\beta+t\alpha)\}$$
$$-\{-2p^2t(t\beta-\alpha+p)+18p^2(\beta+t\alpha)\}^2 ;$$

ou bien, en réduisant,

$$2\{pt^2-6(t\beta-\alpha+p)\}\{2(t\beta-\alpha+p)^2-3pt(\beta+t\alpha)\}$$
$$+p\{t(t\beta-\alpha+p)-9(\beta+t\alpha)\}^2=0 .$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre α et β, pour que le point (α, β) soit un des points de la développée oblique demandée ; c'est donc là l'équation même de cette développée, en y considérant α et β comme des coordonnées courantes.

Si l'on veut déduire de là l'équation de la développée orthogonale de la parabole proposée, il suffira de supposer $t=0$, ce qui donnera, en changeant respectivement α et β en x et y,

$$8(x-p)^3=27py^2\ ;$$

équation connue de la développée ordinaire de la parabole.

Si, après avoir divisé par t^4 l'équation générale de la développée oblique, on y suppose ensuite $t=\infty$, en changeant toujours α et β en x et y, on retombera de nouveau sur l'equation

$$y^2=2px\ ,$$

de la parabole proposée, ainsi que cela doit être, puisqu'alors la question revient à demander quelle est la courbe qu'enveloppent les perpendiculaires à toutes les normales à une parabole donnée.

Le procédé que nous venons d'employer, pour parvenir à l'équation de l'une des développées obliques d'une parabole, s'appliquera également, sans difficulté, à toute autre courbe dans l'équation de laquelle l'une des coordonnées n'entrera qu'au premier degré. Mais il n'en sera pas toujours de même dans le cas où, à une même valeur de chaque coordonnée, répondront plusieurs valeurs de l'autre; car alors il ne suffira pas, pour exprimer que deux points de la courbe se confondent en un seul, d'écrire que ces deux points ont une coordonnée commune. L'équation en α et β, qu'on obtient dans ce cas, peut donc alors se trouver compliquée de solutions étrangères, dont il est préalablement nécessaire de la délivrer.

Pour faire mieux comprendre cette difficulté, par un exemple où elle est facile à faire disparaître, nous reprendrons la question que nous venons de traiter; mais, au lieu d'éliminer x entre les équations (1) et (5), nous en éliminerons y; ce qui, en supposant $t=0$, conduira à l'équation du troisième degré en x

$$2x^3-4(\alpha-p)x^2+2(\alpha-p)^2x-p\beta^2=0\ .$$

Si l'on exprime que cette équation a deux racines égales, cela donnera

$$\beta^2\{8(\alpha-p)^3-27p\beta^2\}=0\ .$$

En égalant le deuxième facteur à zéro, on obtient, comme ci-dessus, l'équation de la développée. Le premier facteur égalé à zéro donne l'axe des x, c'est-à-dire, l'axe même de la courbe. Ce dernier résultat pouvait aisément être prévu. Si, en effet, par deux points d'une parabole, pris sur une même perpendiculaire à son axe, et ayant conséquemment la même abscisse, on mène des normales à cette courbe, ces normales concourront sur ce même axe. On devrait donc trouver cette droite pour le lieu des points de concours des normales menées à la courbe par des points ayant même abscisse, mais des ordonnées de signes contraires.

Un autre inconvénient, attaché à l'emploi de la théorie des racines égales, c'est que, lorsque l'équation finale, soit en x soit en y, est d'un degré tant soit peu élevé, et complète, ou à peu près, la recherche de la condition nécessaire pour que deux de ses racines soient égales, peut être assez laborieuse pour décourager tout à fait le calculateur, ce qui semble militer en faveur de la méthode, incomparablement plus simple, dont nous venons de présenter l'essai.

Nous devons dire, en terminant, que nous n'ignorons pas que M. Poulet Delisle, dans son *Application de l'algèbre à la géométrie*, publiée en 1806, a déjà enseigné à obtenir, par les simples élémens, le cercle osculateur, et conséquemment le centre de courbure, pour chacune des trois lignes du second ordre; d'où il est ensuite facile de parvenir à l'équation de la développée. L'auteur, pour parvenir à son but, exprime qu'un cercle passe par trois points pris arbitrairement sur le périmètre de la courbe, et qu'ensuite ces trois points viennent se confondre en un seul; ce qui établit une parfaite analogie entre la recherche du cercle osculateur et celle de la tangente. L'idée de présenter une théorie purement élémentaire des développées n'est donc pas nouvelle;

mais le procédé suivi par M. Delisle n'est applicable, comme on le voit, qu'aux seules développées orthogonales, tandis que le nôtre, au contraire, s'applique, sans difficulté, à la recherche des développées obliques, de quelque nature qu'elles puissent être, et conséquemment à la recherche des caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction.