ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie transcendante. De la courbure des courbes planes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

De la courbure des courbes planes ;

Par M. GERGONNE.

C'EST principalement dans les recherches relatives à la courbure soit des courbes planes, soit des surfaces courbes, soit des courbes à double courbure, que se montre dans tout son jour l'utilité des notations différentielles, et il suffirait, pour s'en convaincre, de comparer ce que nous allons dire ici sur ce sujet avec ce que nous en avons dit à la pag. 127 de notre IX.^{me} volume, où nous nous étions imposés la loi de ne faire usage que des notations de l'analyse élémentaire. Nous n'aurions donc pas hésité à débuter par ce genre d'application, si nous n'eussions pensé qu'en nous en occupant, nous pourrions avoir quelquefois besoin de nous appuyer sur la théorie des *maxima* et *minima*, et si nous n'avions désiré de n'avoir alors qu'à renvoyer à des principes déjà établis.

Nous devons rappeler ici ce que nous avons déjà dit ailleurs, savoir, que nous ne saurions avoir le dessein d'écrire un traité complet sur la matière, mais seulement de montrer à quel point l'emploi des notations différentielles facilite les recherches de haute géométrie et en généralise les résultats. Il ne sera question, au surplus, dans le présent article, que des courbes planes; d'autres articles seront consacrés aux surfaces courbes et aux courbes à double courbure.

I. Soit

$$\mathrm{f}(x,y)=S=0\,, \qquad (1)$$

une équation en x et y exprimant une courbe plane quelconque, rapportée à deux axes de direction arbitraire; et soit (x',y') un quelconque des points du périmètre de cette courbe; de telle sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x',y')=S'=0\,. \qquad (2)$$

Pour transporter en ce point l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes, il faudra faire, comme l'on sait,

$$x=x'+t\,, \qquad y=y'+u\,; \qquad (3)$$

t et u étant les symboles des nouvelles coordonnées. Or, cela revient évidemment à supposer que, dans (2), x' et y' se changent respectivement en $x'+t$ et $y'+u$, ce qui donnera (tom. XX, pag. 258), en ayant égard à cette même équation (2),

$$0=\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}t\\[2ex]+\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}u\end{array}\right|\frac{1}{1}+\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}t^2\\[2ex]+2\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}tu\\[2ex]+\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}u^2\end{array}\right|\frac{1}{1.2}+\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x'^3}t^3\\[2ex]+3\frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x'^2\mathrm{d}y'}t^2u\\[2ex]+3\frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'^2}tu^2\\[2ex]+\frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}y'^3}u^3\end{array}\right|\frac{1}{1.2.3}\left.\begin{array}{l}+\ldots.\\[2ex]+\ldots.\\[2ex]+\ldots.\\[2ex]+\ldots.\\[2ex]+\ldots.\end{array}\right\}; \quad (4)$$

et telle sera conséquemment l'équation de la courbe (1), rapportée aux nouveaux axes ; équation dans laquelle x' et y' sont deux constantes indéterminées, équivalentes à une seule, attendu qu'elles sont liées par la relation (2). On repassera, d'ailleurs, au système primitif au moyen des équations (3) qui donnent

$$t=x-x' , \qquad u=y-y' . \qquad (5)$$

L'équation (4) peut être regardée comme fondamentale dans toute la théorie qui va nous occuper.

II. Si l'on ne veut considérer qu'un très-petit arc de la courbe, s'étendant fort peu de part et d'autre de l'origine des t et u ; pour tous les points de cet arc, t et u seront de fort petites quantités ; de sorte qu'on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (4), les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces variables ; la suppression de ces termes aura, au surplus, d'autant moins d'influence que l'arc considéré sera plus petit. Ainsi, plus il sera petit et plus il tendra à avoir pour équation

$$\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}t+\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}u=0 \ ; \qquad (6)$$

cette équation représentera donc *rigoureusement* l'arc dont il s'agit, lorsque cet arc se réduira à l'origine des t et u. On peut donc dire que l'équation (6) est celle de la droite qui, à l'origine des t et u, a exactement la même direction que la courbe en ce point. Une telle droite est dite une *tangente* à la courbe (1) au point (x', y'), qui est dit son *point de contact* avec elle.

La droite (1) tant qu'elle ne se confond pas avec l'un des axes, passe nécessairement dans deux des quatre angles des coordonnées opposés par le sommet; puis donc qu'elle tend d'autant plus à se confondre avec un arc de la courbe, que cet arc s'étend moins de part et d'autre de l'origine des t et u, il en faut conclure que, quand aucun des deux axes n'est tangent à la courbe, on peut toujours concevoir un arc s'étendant assez peu, de part et d'autre, de l'origine des t et u, pour que les deux parties de cet arc, déterminées par ce point, soient situées dans deux angles des coordonnées opposés par le sommet, et conséquemment pour que t et u changent de signes, à la fois, en passsant d'un côté à l'autre de l'origine.

III. Pour mieux connaître la nature de cette droite que nous avons nommée tangente, conduisons, par l'origine des t et u, une droite arbitraire ayant pour équation

$$u = Mt\,, \tag{7}$$

où M est une indéterminée. Pour avoir les intersections de cette droite avec la courbe, il faudra, dans les équations (4) et (7), considérer t et u comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. Or, la substitution de la valeur (7) de u, dans l'équation (4), donne

$$0 = t\left\{\left(\frac{dS'}{dx'} + \frac{dS'}{dy'}M\right) + \left(\frac{d^2S'}{dx'^2} + 2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M + \frac{d^2S'}{dy'^2}M^2\right)\frac{t}{1.2} + \ldots\right\}; \tag{8}$$

telle est donc l'équation qui donnera les valeurs de t qui répondent aux intersections de la droite (7) avec la courbe (4) ; valeurs qui, substituées dans l'équation (7), feront connaître les valeurs correspondantes de u.

Or, l'équation (8) est d'abord satisfaite en posant $t=0$, d'où résulte aussi $u=0$; et c'est là ce qu'on pouvait fort bien prévoir à l'avance, puisque l'origine des t et u est, par construction, un point commun à la droite et à la courbe. L'équation (8), délivrée de cette racine, devient

$$0=\left(\frac{dS'}{dx'}+\frac{dS'}{dy'}M\right)+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M+\frac{d^2S'}{dy'^2}M^2\right)t+\ldots, \quad (9)$$

et doit donner les valeurs de t qui répondent aux intersections, autres que l'origine des t et u, de la droite (7) avec la courbe (4) ; intersections qui pourront être plus ou moins nombreuses, et dont la situation, sur cette courbe, variera avec M, c'est-à-dire, avec la direction de la droite (7).

Si l'on veut profiter de l'indétermination de M, pour faire en sorte qu'un nouveau point d'intersection vienne se confondre avec le premier, à l'origine des t et u, il faudra faire en sorte que l'équation (9) soit, comme l'équation (8), satisfaite en posant $t=0$; ce qui exigera qu'on ait

$$\frac{dS'}{dx'}+\frac{dS'}{dy'}M=0\ ; \quad (10)$$

équation qui déterminera la valeur de M qui satisfait à cette condition. Or, cette valeur, substituée dans l'équation (7). fait retomber de nouveau sur l'équation (6) de la tangente à l'origine des t et u ; donc la tangente à une courbe, en l'un de ses points, n'est autre chose que ce que deviendrait une corde qui, passant par ce point, tournerait sur lui, jusqu'à ce que sa longueur serait devenue tout à fait nulle ; d'où il suit qu'une tangente à une courbe peut être considérée comme ayant, avec cette courbe, deux points communs qui se confondent en un seul.

Puisque la tangente à une courbe a, en son point de contact, même direction que la courbe en ce point, il s'ensuit que, par le point de contact d'une tangente, il est impossible de mener une droite qui, à partir de ce point, passe entre elle et la courbe; car la direction d'une telle droite s'approchant plus alors de celle de la courbe que ne le ferait la direction de la tangente, il ne serait plus vrai de dire que cette dernière direction est, au point de contact, celle de la courbe même.

IV. Si, continuant à représenter par t et u les deux coordonnées d'un même point quelconque de la courbe, on représente par u_1 la coordonnée de la tangente qui répond à t, on aura (6)

$$o=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u_1\ . \qquad (11)$$

En retranchant cette équation de l'équation (4), il viendra

$$-\frac{dS'}{dy'}(u-u_1)=\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2\right)+\ldots. \qquad (12)$$

Or, on peut toujours supposer t et u assez petits, sans être nuls, pour ne faire dépendre le signe du second membre que du signe de l'ensemble de ses termes de deux dimensions, lequel reste invariablement le même si t et u changent de signes à la fois, comme il arrive en passant d'un côté à l'autre de l'origine, d'après la remarque qui a été faite ci-dessus; donc aussi on peut toujours concevoir un arc s'étendant assez peu de part et d'autre de l'origine des t et u, pour que, dans toute son étendue, $u-u_1$ conserve invariablement le même signe; ce qui revient à dire qu'on peut toujours concevoir un arc de courbe s'étendant assez peu de part et d'autre de son point de contact avec une tangente, pour que cet arc soit entièrement situé d'un même côté de cette tangente. La tangente à une courbe, en un quelconque de ses points, touche donc la courbe sans la couper en ce point.

Nous disons *en un quelconque de ses points*, car, si l'origine des t et u, ou le point (x',y'), était tellement choisi sur la courbe, qu'on eût, à la fois,

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}=0\,,\qquad \frac{d^2S'}{dx'dy'}=0\,,\qquad \frac{d^2S'}{dy'^2}=0\,,\qquad (13)$$

ce qui ne saurait, au surplus, avoir généralement lieu, puisque ces trois équations sont déjà généralement incompatibles, et qu'il faut y joindre encore l'équation (2) $S'=0$; l'équation (12) devenant alors

$$-\frac{dS'}{dy'}(u-u_1)=\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t^2u+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}tu^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}u^3\right)+\ldots;\ (14)$$

comme on pourrait toujours prendre t et u assez petits, sans être nuls, pour ne faire dépendre le signe de tout le second membre que du signe de l'ensemble de ses termes de trois dimensions, lequel change, en passant d'un côté à l'autre de l'origine des t et u, il s'ensuit qu'alors on pourrait toujours prendre un arc de la courbe s'étendant assez peu de part et d'autre du point de contact de la tangente, pour qu'en passant d'un côté à l'autre de ce point, $u-u_1$ changeât de signe ; ce qui revient à dire que les deux parties de cet arc, déterminées par le point de contact, se trouveraient alors situées de différens côtés de la tangente qui, de la sorte, toucherait et couperait la courbe en ce point. Un tel point d'une courbe est ce qu'on appelle un *point d'inflexion.*

Dans la même hypothèse, en posant l'équation (10), l'équation (9) deviendrait divisible par t^2 ; il y aurait donc alors, outre l'origine des t et u, deux autres points communs à la droite (6) et à la courbe (4) qui viendraient se confondre avec celui-là ;

ce qui revient à dire que la tangente à un point d'inflexion d'une courbe peut être considérée comme ayant, avec cette courbe, trois points communs qui se confondent en un seul.

Veut-on savoir si une courbe proposée a des points d'inflexion et en assigner la situation, sur la courbe? Il ne s'agira, pour cela, que d'éliminer x' et y' entre les équations (13) et l'équation (2); on obtiendra ainsi deux équations entre quantités connues, lesquelles ne pourront être qu'identiques ou absurdes; si elles sont toutes deux identiques, la courbe aura un ou plusieurs points d'inflexion, dont la situation sera fixée par les systèmes de valeurs de x' et y' tirées de deux quelconques de ces quatre équations; mais si une seule des équations entre quantités connues est absurde, et, à plus forte raison, si elles le sont toutes deux, on devra en conclure que la courbe n'a aucun point d'inflexion.

On se comporterait exactement de la même manière si, l'équation d'une courbe contenant des coefficiens indéterminés, au nombre de deux au moins, on voulait profiter de leur indétermination pour faire acquérir à la courbe un ou plusieurs points d'inflexion. Seulement les deux équations auxquelles on parviendrait ne seraient proprement ni identiques ni absurdes; ce serait des équations de condition, exprimant les relations que devraient avoir entre eux les coefficiens indéterminés pour que de tels points existassent. Ces relations ainsi admises, la situation des points d'inflexion se déterminerait comme il vient d'être dit ci-dessus.

En raisonnant d'une manière analogue, on parviendra facilement à démontrer que si, pour l'un (x', y') des points d'une courbe, outre les équations (13), on a encore

$$\frac{d^3S'}{dx'^3}=0\,, \quad \frac{d^3S'}{dx'^2dy'}=0\,, \quad \frac{d^3S'}{dx'dy'^2}=0\,, \quad \frac{d^3S'}{dy'^3}=0\,; \quad (15)$$

la courbe sera toute située d'un même côté de sa tangente en ce point, laquelle conséquemment la touchera en ce même point, sans la couper, et pourra être considérée comme ayant, avec la courbe, quatre points communs se confondant en un seul; que si l'on a, en outre, pour ce point,

$$\frac{d^4S'}{dx'^4}=0\,,\quad \frac{d^4S'}{dx'^3dy'}=0\,,\quad \frac{d^4S'}{dx'^2dy'^2}=0\,,\quad \frac{d^4S'}{dx'dy'^3}=0\,,\quad \frac{d^4S'}{dy'^4}=0\,; \quad (16)$$

la tangente touchera et coupera alors la courbe, et son point de contact pourra être considéré comme cinq points communs à l'une et à l'autre, se confondant en un seul, et ainsi de suite. La recherche de ces points s'exécutera d'ailleurs comme celle des simples points d'inflexion; mais la chance d'en obtenir ira sans cesse en diminuant, à raison du nombre toujours croissant des équations de conditions auxquelles on aura à satisfaire.

V. En retournant aux coordonnées primitives, au moyen des formules (5), l'équation (6), de la tangente au point (x', y'), deviendra

$$\frac{dS'}{dx'}(x-x')+\frac{dS'}{dy'}(y-y')=0\,; \qquad (17)$$

équation dans laquelle les deux constantes x' et y' sont liées entre elles par l'équation (2), et ne doivent ainsi compter que pour une seule. Rien ne sera donc plus facile que d'obtenir l'équation de la tangente à une courbe, par un point donné sur cette courbe.

Si le point (x', y') n'est pas donné, cette équation, en y mettant, pour x', y', tous les systèmes de valeurs compatibles avec la relation (2), pourra indistinctement exprimer toutes les tangentes à la courbe. On pourra donc ainsi profiter de l'indétermination de x' et y' pour assujettir une tangente demandée à une condition donnée.

Si, par exemple, on veut assujettir la tangente à passer par un point donné (a, b), il faudra exprimer que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation (17), ce qui donnera

$$\frac{dS'}{dx'}(a-x')+\frac{dS'}{dy'}(b-y')=0\ ; \qquad (18)$$

équation qui. combinée avec l'équation (2), fera connaître les points de contact de toutes les tangentes qui peuvent être menées à la courbe par le point (a, b).

Au lieu de résoudre les équations (2) et (18), par rapport à x' et y', on peut chercher les intersections des deux courbes qu'elles expriment, ou, ce qui revient au même, chercher les intersections de la courbe (1) avec la courbe exprimée par l'équation

$$\frac{dS}{dx}(x-a)+\frac{dS}{dy}(y-b)=0\ ; \qquad (19)$$

cette dernière est donc celle d'une courbe qui coupe la proposée aux points de contact de toutes les tangentes qui peuvent lui être menées du point (a, b).

Si l'on demandait de mener à la courbe (1) une tangente parallèle à une droite donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ , \qquad (20)$$

la condition de parallélisme de cette droite avec la droite (17) serait exprimée par l'équation

$$a\frac{dS'}{dx'}+b\frac{dS'}{dy'}=0\ ; \qquad (21)$$

d'où il suit, en raisonnant comme ci-dessus, que l'équation

$$a\frac{dS}{dx}+b\frac{dS}{dy}=0\ , \qquad (22)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée aux points de contact de toutes les tangentes qui peuvent lui être menées parallèlement à la droite (20).

On peut encore se demander de mener une tangente commune à deux courbes données, ou à deux branches d'une même courbe. Supposons d'abord qu'il soit question de deux courbes données par les équations

$$S_1=0\ , \qquad S_2=0\ ; \qquad (23)$$

soient (x',y'), (x'',y'') les points de contact respectifs, sur les deux courbes, ce qui donnera d'abord

$$S'_1=0\ , \qquad S''_2=0\ ; \qquad (24)$$

cette tangente commune pouvant être (17) indistinctement exprimée par l'une ou l'autre équation

$$\frac{dS'_1}{dx'}(x-x')+\frac{dS'_1}{dy'}(y-y')=0\ ; \quad \frac{dS''_2}{dx''}(x-x'')+\frac{dS''_2}{dy''}(y-y'')=0\ ;$$

lesquelles reviennent à

$$\frac{dS'_1}{dx'}x+\frac{dS'_1}{dy'}y=\frac{dS'_1}{dx'}x'+\frac{dS'_1}{dy'}y'\ ,$$

$$\frac{dS''_2}{dx''}x+\frac{dS''_2}{dy''}y=\frac{dS''_2}{dx''}x''+\frac{dS''_2}{dy''}y''\ ;$$

il faudra écrire que ces deux équations n'expriment qu'une seule et même droite, ce qu'on fera en posant la double équation

$$\frac{\frac{dS'_1}{dx'}}{\frac{dS''_2}{dx''}}=\frac{\frac{dS'_1}{dy'}}{\frac{dS''_2}{dy''}}=\frac{\frac{dS'_1}{dx'}x'+\frac{dS'_1}{dy'}y'}{\frac{dS''_2}{dx''}x''+\frac{dS''_2}{dy''}y''}\ ; \qquad (25)$$

telles seront donc les deux équations qu'il faudra combiner avec les équations (24) . pour obtenir les divers systèmes de valeurs des coordonnées des deux points de contact (x',y') , (x'',y'').

S'il s'agissait des tangentes communes à deux branches d'une même courbe , il faudrait remplacer S_1 et S_2 par S ; de sorte qu'en désignant simplement par (x,y) , (x',y') les deux points de contact , les quatre équations à résoudre seraient

$$S=0\ ,\quad S'=0\ ,\quad \frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dS'}{dx'}}=\frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dS'}{dy'}}=\frac{\frac{dS}{dx}x+\frac{dS}{dy}y}{\frac{dS'}{dx'}x'+\frac{dS'}{dy'}y'}\ . \tag{26}$$

VI. Si l'on suppose les coordonnées rectangulaires , l'équation de la perpendiculaire menée à la tangente (17) , par son point de contact , c'est-à-dire , de la *normale* à la courbe en ce point , sera

$$\frac{dS}{dy'}(x-x')-\frac{dS'}{dx'}(y-y')=0\ ; \tag{27}$$

équation dans laquelle , comme dans celle de la tangente , les deux constantes x' , y' sont liées entre elles par la relation (2) ; et qui conséquemment pourra indistinctement exprimer toutes les normales à la courbe , si ces deux constantes ne sont liées l'une à l'autre par aucune autre condition.

Si donc on veut particulariser une de ces normales , il faudra établir une second relation entre les constantes x' , y'. On pourra donc , en particulier, assujettir la normale à toutes les conditions auxquelles nous venons tout à l'heure d'assujettir la tangente. Comme cela ne saurait offrir de difficultés , d'après ce qui précède , nous nous bornerons ici à donner les résultats.

L'équation

$$\frac{dS}{dy}(x-a)-\frac{dS}{dx}(y-b)=0\ , \tag{28}$$

est celle d'une courbe qui coupe la courbe (1) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées du point (a, b).

L'équation

$$a\frac{dS}{dy}-b\frac{dS}{dx}=0\,, \qquad (29)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées parallèlement à la droite (20).

Si l'on veut mener, aux deux courbes (23), une normale commune, les points (x', y'), (x'', y''), où se terminera la normale sur les deux courbes, seront donnés par les équations (24), combinées avec la double équation

$$\frac{\frac{dS'_1}{dx'}}{\frac{dS''_2}{dx''}}=\frac{\frac{dS'_1}{dy'}}{\frac{dS''}{dy''}}=\frac{\frac{dS'_1}{dy'}x'-\frac{dS'_1}{dx'}y'}{\frac{dS''_2}{dy''}x''-\frac{dS''_2}{dx''}y''}\,; \qquad (30)$$

mais s'il s'agit d'une normale commune à deux branches de la courbe (1), les coordonnées des deux extrémités (x, y), (x', y') de cette normale devront être déterminées par les quatre équations

$$S=0\,, \quad S'=0\,, \quad \frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dS'}{d'x}}=\frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dS'}{dy'}}=\frac{\frac{dS}{dy}x-\frac{dS}{dx}y}{\frac{dS'}{dy'}x'-\frac{dS'}{dx'}y'}\,. \qquad (31)$$

VII. Dans tout ce qui précède nous avons tacitement supposé que le point (x', y') était quelconque sur la courbe (1); mais ce point pourrait être choisi de telle sorte, sur cette courbe, que $\frac{dS'}{dx'}$ et $\frac{dS'}{dy'}$, fussent tous deux nuls; ce qui, au surplus, ne saurait avoir lieu généralement, puisque S' est déjà nulle, et que les trois équations

$$S'=0\,, \quad \frac{dS'}{dx'}=0\,, \quad \frac{dS'}{dy'}=0\,, \tag{32}$$

sont, en général, incompatibles.

Alors l'équation (4) se réduit à

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
0=\dfrac{d^2S'}{dx'^2}\,t^2 & \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{d^3S'}{dx'^3}\,t^3 & \dfrac{1}{1.2.3}+\ldots\\
\quad +2\,\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\,tu & \qquad +3\,\dfrac{d^3S'}{dx'^2dx'}\,t^2u & \qquad +\ldots\\
\quad +\dfrac{d\,S'}{dy'^2}\,u^2 & \qquad +3\,\dfrac{d^3S'}{dx'dy'^2}\,tu^2 & \qquad +\ldots\\
 & \qquad +\dfrac{d^3S'}{dy'^3}\,u^3 & \qquad +\ldots
\end{array}\right\}. \tag{33}$$

Or, si l'on veut ne considérer qu'un fort petit arc s'étendant très-peu de part et d'autre de l'origine des t et u, pour tous les points de cet arc, t et u seront de fort petites quantités ; de sorte qu'on pourra, sans erreur sensible, faire abstraction des termes de plus de deux dimensions en t et u, dans le second membre de l'équation (33). On peut donc dire que, pour l'arc dont il s'agit, l'équation sera sensiblement

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}\,t^2+2\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}\,u^2=0\,, \tag{34}$$

et représentera d'autant plus approximativement l'arc de courbe, que cet arc sera plus petit, puisqu'alors les termes négligés en auront des valeurs d'autant moindres ; elle exprimera donc *rigoureusement* l'arc dont il s'agit, lorsqu'il se réduira à l'origine des t et u, c'est-à-dire au point (x', y').

Or, l'équation (34) exprime deux droites qui se coupent, deux droites qui se confondent, ou un simple point, suivant que la fonction

$$\left(\frac{d^2S'}{dx'dy'}\right)^2-\frac{d^2S'}{dx'^2}\cdot\frac{d^2S'}{dy'^2}\,, \qquad (35)$$

est positive, nulle ou négative ; donc, dans les mêmes circonstances, la courbe, à l'origine des t et u, se réduira *rigoureusement* à deux droites qui se couperont, à deux droites qui se confondront ou à un simple point ; c'est-à-dire qu'alors le point (x',y') sera un point d'intersection ou de contact de deux branches de la courbe (1), ou un point isolé, lié analytiquement avec elle et compris dans son équation. Dans les deux premiers cas, l'équation (34), ou bien, en repassant au système primitif, au moyen des formules (5), l'équation

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}(x-x')^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+\frac{d^2S'}{dy'^2}(y-y')^2=0\,, \qquad (36)$$

sera l'équation commune aux tangentes aux deux branches de la courbe au point (x',y').

On peut remarquer que, dans le cas où les équations (32) sont satisfaites, l'équation (8) est immédiatement divisible par t^2 ; et, qu'en ôtant ce diviseur et supposant ensuite t nul, on a, pour déterminer M, l'équation

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M+\frac{d^2S'}{dy'^2}M^2=0\;; \qquad (37)$$

de laquelle éliminant M, au moyen de l'équation (7), on retombe exactement sur l'équation (34). En conséquence les points d'une courbe pour lesquels les équations (32) sont satisfaites, sont appelés des *points doubles* de cette courbe.

L'équation $S=0$ d'une courbe étant donnée ; si l'on veut savoir si cette courbe a des points doubles, et en déterminer la situation, on éliminera x et y entre les trois équations

$$S=0\ , \quad \frac{dS}{dx}=0\ , \quad \frac{dS}{dy}=0\ ; \qquad (38)$$

l'équation résultante, entre quantités connues, ne pourra être qu'absurde ou identique. Dans le premier cas, la courbe n'aura aucun point double; dans le second, elle en aura un ou plusieurs dont les coordonnées seront données par deux quelconques des équations (38). Ces coordonnées étant mises ensuite tour à tour à la place de x' et y', dans l'équation (36), on connaîtra ainsi les directions des deux tangentes en chacun de ces points.

On se comporterait exactement de la même manière si, l'équation $S=0$ renfermant un ou plusieurs coefficiens arbitraires, on voulait profiter de leur indétermination pour lui faire exprimer une courbe ayant un ou plusieurs points doubles; il arriverait seulement qu'en éliminant x et y entre les trois équations (38), l'équation à laquelle on serait conduit ne serait ni identique ni absurde; elle exprimerait la condition à laquelle les constantes arbitraires devraient satisfaire pour que de tels points existassent; et, en supposant cette condition satisfaite, le calcul s'acheverait comme dans le premier cas.

VIII. Des considérations analogues prouvent que, si le point (x',y') était choisi sur la courbe (1) de telle sorte que, outre les équations (32), on eût encore celles-ci :

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}=0\ , \quad \frac{d^2S'}{dx'dy'}=0\ , \quad \frac{d^2S'}{dy'^2}=0\ ; \qquad (39)$$

ce qui peut encore moins avoir lieu généralement; l'équation de la courbe, réduite au point (x',y'), serait

$$\frac{d^3S'}{dx'^3}(x-x')^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}(x-x')^2(y-y')+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}(x-x')(y-y')^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}(y-y')^3=0\,; \quad (40)$$

équation qui exprime trois droites qui se coupent, ou bien deux droites qui se confondent et une troisième droite qui les coupe, ou enfin une droite unique et un point situé sur sa direction, suivant que la fonction

$$\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dy'^3}-\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2-4\left\{\left(\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right)^2-\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right\}\left\{\left(\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2-\frac{d^3S'}{dy'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right\}, \quad (41)$$

est négative, nulle ou positive; et qui, en particulier, exprimera trois droites qui se confondent, si l'on a, à la fois,

$$\left(\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right)^2=\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\,, \quad \left(\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2=\frac{d^3S'}{dy'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\,; \quad (42)$$

la courbe aura donc, dans les mêmes circonstances, en son point (x',y'), ou trois branches qui se couperont, ou deux branches qui se toucheront et une troisième qui les coupera toutes deux à leur point de contact, ou trois branches qui se toucheront, ou enfin une branche unique et un point sur sa direction, lié analytiquement avec elle; et, comme alors l'équation (8) devient immédiatement divisible par t^3, on dit que le point (x',y') est un *point triple*. Les tangentes aux diverses branches de la courbe qui passent par ce point sont d'ailleurs données par l'équation (40).

Veut-on savoir si une courbe donnée par l'équation $S=0$ a des points triples, et en déterminer la situation? Ou bien, cette équation contenant des coefficiens arbitraires, veut-on profiter de leur indétermination pour faire acquérir des points triples à la courbe qu'elle exprime? Dans l'un comme dans l'autre cas il faudra d'abord éliminer x et y entre les six équations

$$\left.\begin{array}{c} S=0\ ; \\ \dfrac{dS}{dx}=0\ , \quad \dfrac{dS}{dy}=0\ ; \\ \dfrac{d^2S}{dx^2}=0\ , \quad \dfrac{d^2S}{dxdy}=0\ , \quad \dfrac{d^2S}{dy^2}=0\ ; \end{array}\right\} \quad (43)$$

il en résultera quatre équations, soit entre quantités connues, soit entre les coefficiens arbitraires. Dans le premier cas, il n'y aura des points triples qu'autant que ces équations seront toutes quatre identiques ; dans le second, si les coefficiens arbitraires ne sont pas en moindre nombre que celles de ces équations qui ne seront pas identiques d'elles-mêmes, ces équations exprimeront les relations cherchées. Dans tous les cas, deux quelconques des équations (43) feront connaître les coordonnées des points triples; et la substitution des valeurs de ces coordonnées, à la place de x' et y', dans l'équation (40), fera connaître les tangentes aux diverses branches de la courbe qui se couperont en ces différens points.

On voit aisément par là ce qu'il y aurait à dire sur la recherche des *points quadruples*, et, en général, sur la recherche des *points multiples*, d'un ordre de multiplicité quelconque.

IX. Pour qu'une courbe $S_1=0$ passe par le point (x',y'), il faut qu'on ait $S'_1=0$. Si l'on veut en outre que cette courbe ait, en ce point (x',y'), la même tangente que la courbe (1) en ce point; on voit (6) qu'il suffira pour cela qu'on ait

$$\frac{dS'_1}{dx'}=\lambda\frac{dS'}{dx'}\ , \qquad \frac{dS'_1}{dy'}=\lambda\frac{dS'}{dy'}\ ; \qquad (44)$$

λ étant une constante quelconque.

Donc, en particulier, l'équation

$$0=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+C(t^2+u^2)\ , \qquad (45)$$

est, quelle que soit la constante C, l'équation d'un cercle qui, non seulement passe, comme la courbe (1), par l'origine des t et u, c'est-à-dire, par le point (x',y'), mais qui a, en outre, en ce point, même tangente que cette courbe ; et qui a conséquemment son centre sur la normale à cette même courbe, en ce point. Un tel cercle est dit *tangent* à la courbe (1) au point (x',y') ; d'où l'on voit, à cause de l'indétermination de C, qu'une courbe a, en chacun de ses points, une infinité de cercles qui lui sont tangens, et qui ont tous leurs centres sur la normale en ce point. Il est d'ailleurs manifeste qu'un cercle tangent à une courbe, en un quelconque de ses points, peut être considéré comme ayant avec cette courbe deux points communs qui se confondent en un seul. Il peut avoir d'ailleurs avec la courbe un plus ou un moins grand nombre d'autres points communs.

Ces derniers seront évidemment donnés par le système des équations (4) et (45) dans lesquelles il faudra considérer t et u comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. On pourra, au surplus, dans cette recherche, remplacer l'équation (4) par quelle combinaison on voudra de l'une et de l'autre, par leur différence, par exemple, qui est

$$\left.\begin{aligned}0=&\left(\frac{1}{2}\frac{d^2S'}{dx'^2}-C\right)t^2+\left(\frac{1}{2}\frac{d^2S'}{dy'^2}-C\right)u^2+\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu\\+&\frac{1}{6}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t^2u+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}tu^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}u^3\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Cherchons à déterminer la constante C de telle sorte qu'un troisième point, commun aux deux courbes, vienne se confondre avec les deux premiers, à l'origine des t et u, c'est-à-dire, en (x',y').

Pour cela remarquons d'abord qu'on peut toujours profiter de l'indétermination de C pour amener ce troisième point à être aussi voisin de l'origine des t et u qu'on le voudra, et qu'alors on pourra sensiblement, dans la recherche de ce même point, négliger les termes de dimensions plus élevées en t et u, vis-à-vis des termes de dimensions moindres, c'est-à-dire, remplacer les équations (45) et (46) par les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u\ , \\ 0&=\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}-2C\right)t^2+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}-2C\right)u^2+2\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu\ ; \end{aligned}\right\}\quad(47)$$

or, en éliminant de la seconde, au moyen de la première, une quelconque des coordonnées t et u, l'autre disparaît d'elle-même, et il vient

$$\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}-2C\right)+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}-2C\right)-2\,\frac{dS'}{dx'}\,\frac{dS'}{dy'}\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}=0\ ;$$

d'où on tire

$$C=\frac{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\,\frac{dS'}{dx'}\,\frac{dS'}{dy'}\,\frac{d^2S}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}{2\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}\ ;\quad(48)$$

donc, plus C approchera de cette valeur et plus aussi le troisième point commun approchera de se confondre avec les deux autres ; il se confondra donc *rigoureusement* avec eux, lorsque C aura exactement cette valeur.

Remarquons présentement que l'équation (45) peut être écrite comme il suit :

$$\left(t+\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(u+\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dy'}\right)^2=\frac{1}{4C^2}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\};\ (49)$$

de sorte que le cercle qu'elle exprime a, respectivement, pour les coordonnées de son centre et pour son rayon,

$$-\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dx'}\ ,\quad -\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dy'}\ ,\quad \frac{1}{2C}\sqrt{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2}\ ;$$

en mettant donc pour C sa valeur, et repassant au système primitif, au moyen des formules (5), le cercle dont trois points se confondent avec trois points de la courbe en (x', y'), aura, pour les coordonnées de son centre,

$$\left.\begin{aligned}
x&=x'-\frac{\frac{dS'}{dx'}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\ ,\\
y&=y'-\frac{\frac{dS'}{dy'}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\ ;
\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

et pour son rayon

$$r=\frac{\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\ .\quad(51)$$

Ce cercle est ce qu'on appelle le *cercle osculateur* de la courbe au point (x', y'); son centre et son rayon sont dits le *centre* et le *rayon de courbure* de cette même courbe, en ce même point. Nous allons voir tout à l'heure la raison de ces dénominations.

X. Pour abréger, désignons par Ω le second membre de l'équation (4), et par Ω' ce que devient ce second membre, lorsqu'on y change respectivement t et u en t' et u'; si (t', u') est un point de la courbe (4), de sorte qu'on ait $\Omega'=0$, l'équation de la normale menée, par ce même point, à la courbe $\Omega=0$ sera (27)

$$\frac{d\Omega'}{du'}(t-t')-\frac{d\Omega'}{dt'}(u-u')=0\,; \qquad (52)$$

les deux constantes t' et u' étant liées entre elles par l'équation $\Omega'=0$, c'est-à-dire, par l'équation

$$0=\left.\begin{array}{l} \frac{dS'}{dx'}t'+\frac{d^2S'}{dx'^2}t'^2 \\ +\frac{dS'}{dy'}u'+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'u' \\ \qquad\qquad +\frac{d^2S'}{dy'^2}u'^2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \frac{1}{1.2}+\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^3 \\ +3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2u' \\ +3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'^2 \\ +\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^3 \end{array}\left|\begin{array}{l} \frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}; \qquad (53)$$

ce qui donne

$$\frac{d\Omega'}{dt'}=\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^2+2\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}u'^2\right)+\ldots\ldots;$$

$$\frac{d\Omega'}{du'}=\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^2+2\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2\right)+\ldots\ldots;$$

au moyen de quoi l'équation (51) de la normale au point (t', u') deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^2+2\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2\right)+\ldots\ldots\right\}(t-t')\\ -\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^2+2\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}u'^2\right)+\ldots\ldots\right\}(u-u')\end{array}\right\}=0\,. \quad (54)$$

Si l'on veut avoir l'intersection de cette normale avec celle qui passe par l'origine des t et u, c'est-à-dire, par le point (x',y'), il faudra considérer t et u comme les deux inconnues d'un même problème déterminé, tant dans l'équation (54) que dans l'équation de la normale à l'origine des t et u, qui est (27)

$$\frac{dS'}{dy}t-\frac{dS'}{dx'}u=0\ ; \qquad (55)$$

mais, si le point (t', u') est supposé très-voisin de l'origine des t et u, on pourra, sans erreur sensible, remplacer, dans cette recherche, l'équation (54) par l'équation plus simple

$$\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)\right\}(t-t')-\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)\right\}(u-u')\ ; \qquad (56)$$

et même remplacer cette dernière par telle combinaison qu'on en voudra faire avec l'autre, de manière à n'en pas élever le degré; par leur différence, par exemple, qui est

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)t-\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)u\\ =\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)\right\}t'-\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)\right\}u'\end{array}\right\}. \qquad (57)$$

Si l'on résout les deux équations (55) et (57), par rapport à t et u, et que, dans les numérateurs des valeurs de ces deux inconnues, on néglige les termes de deux dimensions en t' et u', vis-à-vis de ceux qui n'en ont qu'une seule, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
t&=-\frac{\dfrac{dS'}{dx'}\left(\dfrac{dS'}{dy'}t'-\dfrac{dS'}{dx'}u'\right)}{\left(\dfrac{dS'}{dy'}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}-\dfrac{dS'}{dx'}\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\right)t'-\left(\dfrac{dS'}{dx'}\dfrac{d^2S'}{dy'^2}-\dfrac{dS'}{dy'}\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\right)u'}\,,\\
u&=-\frac{\dfrac{dS'}{dy'}\left(\dfrac{dS'}{dy'}t'-\dfrac{dS'}{dx'}u'\right)}{\left(\dfrac{dS'}{dy'}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}-\dfrac{dS'}{dx'}\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\right)t'-\left(\dfrac{dS'}{dx'}\dfrac{d^2S'}{dy'^2}-\dfrac{dS'}{dy'}\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\right)u'}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

telles seront donc, approximativement, les coordonnées de l'intersection des deux normales, et d'autant plus approximativement que le point (t', u') sera plus voisin de l'origine des t et u; c'est-à-dire, d'autant plus approximativement que t' et u' seront plus petits.

Mais, dans cette hypothèse, l'équation (53) se réduit sensiblement à

$$\frac{dS'}{dx'}t'+\frac{dS'}{dy'}u'=0\,;\qquad(59)$$

en employant donc cette dernière équation à chasser des formules (57) l'une quelconque des coordonnées t' et u', l'autre disparaîtra d'elle-même, et l'on obtiendra ainsi des formules qui conviendront rigoureusement au cas où le point (t', u') se confond avec l'origine des t et u, puisque les coordonnées de ce point (t', u') n'y figureront plus. Or, on retombe ainsi de nouveau sur les formules (50) qui donnent les coordonnées du centre de courbure; d'où résulte ce théorème :

Si une normale mobile marche vers une normale fixe, leur point d'intersection marchera sur cette dernière, de manière à s'arrêter au *centre de courbure qui lui répond, lorsque la seconde normale aura atteint la première.*

XI. Ce théorème nous met en mesure de donner une idée beaucoup plus claire de ce que nous avons nommé cercle osculateur, centre et rayon de courbure d'une courbe, en chacun de ses points.

Soit d'abord un polygone plan rectiligne ouvert quelconque ABCD......, sur la convexité duquel soit appliqué un fil, fixé par une extrémité à son dernier sommet, et venant se terminer en A par son autre extrémité. Concevons qu'on développe ce fil, sans lui faire quitter le plan du polygone; son extrémité mobile décrira d'abord, dans le supplément de l'angle B, un arc de cercle ayant le point B pour centre et le côté BA pour rayon; mais, du moment que ce fil aura pris la direction du prolongement de CB, toute sa portion d'abord couchée le long de ce côté s'en détachera à la fois; de sorte que le premier arc décrit se prolongera, dans le supplément de l'angle C, suivant un second arc ayant le sommet C pour centre et CB+BA pour rayon. On voit qu'en continuant ainsi le développement, dans le même sens, l'extrémité mobile du fil décrira, sur le plan du polygone, une courbe composée d'une suite d'arcs de cercles, ayant successivement pour centres les différens sommets du polygone, et des rayons croissant subitement d'un arc à l'autre d'une quantité égale à la longueur d'un côté du polygone; et ces arcs seront consécutivement tangens les uns aux autres, puisque le point commun à deux arcs consécutifs quelconque sera constamment sur le prolongement d'un côté du polygone; c'est-à-dire, sur la droite qui joindra leurs centres. Un tel système d'arcs forme ce qu'on appelle *une anse de panier*.

Les rayons de ces arcs étant ainsi continuellement croissans, du premier au dernier, si on prolonge l'un d'eux, de part et d'autre de ses points de contact avec les deux qui le comprennent, il enveloppera celui des deux dont le rayon sera plus petit que le sien, et sera, au contraire, enveloppé par celui dont le rayon sera plus grand.

Ceci suppose, au surplus, que le polygone générateur de l'anse de panier est convexe, dans toute sa longueur; car, dans le cas contraire, suivant la manière dont s'exécuterait le développement du fil, le rayon de certains arcs pourrait être, à la fois, tantôt plus grand et tantôt plus petit que les rayons des arcs qui les comprendaient; de sorte que de tels arcs, prolongés de part et d'autre, tantôt envelopperaient à la fois ces deux-là et tantôt en seraient à la fois enveloppés.

Si l'on conçoit présentement que les côtés du polynome deviennent de plus en plus petits, de plus en plus nombreux et de moins en moins inclinés les uns aux autres, les arcs de cercles, dont se composera l'anse de panier, deviendront eux-mêmes de plus en plus petits et plus nombreux et de rayons de moins en moins différens.

Si, enfin, on remplace le polygone par une courbe continue, laquelle peut être considérée comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits et infiniment peu inclinés les uns aux autres, l'anse de panier deviendra également une courbe continue, composée d'une infinité d'arcs de cercles infiniment petits, dont les rayons croîtront ou décroîtront par degré insensibles, et dont les centres seront les différens points de la courbe d'abord enveloppée par le fil; les tangentes à cette dernière courbe seront toutes normales à l'autre; le point de contact de l'une quelconque sera le centre de l'arc infiniment petit de l'autre qui répondra au pied de la normale, et la distance entre ces deux points sera le rayon de cet arc.

Réciproquement, une courbe continue étant tracée sur un plan, si on mène les normales de tous ses points, toutes ces normales seront tangentes à une seconde courbe qui sera évidemment celle qu'il faudrait prendre pour base de développement d'un fil dont l'extrémité mobile devrait décrire la première. Chacun des points de la seconde courbe sera le centre de l'un des arcs de cercles infiniment petits dont la première pourra être réputée l'assemblage ; cet arc se trouvant situé à l'intersection de la première courbe avec la tangente menée à la seconde par ce même point ; et la longueur de cette tangente, terminée à ces deux points, sera le rayon de cet arc.

Ainsi, en résumé, toute courbe donnée peut être considérée comme composée d'arcs de cercles infiniment petits, de rayons continuellement croissans ou décroissans, se touchant consécutivement ; le cercle dont un quelconque de ces arcs fait partie, et qui a évidemment même courbure que cet arc lui-même, est ce que nous avons appelé le cercle osculateur de la courbe en ce point ; et l'on voit qu'en général il doit toucher et couper à la courbe, c'est-à-dire qu'il doit l'envelopper d'une part et en être, au contraire, enveloppé de l'autre. Le centre de ce cercle qui est, en même temps, le centre de courbure de la courbe en ce même point, n'est autre que le point de contact de la normale en ce point avec la courbe à laquelle toutes les normales sont tangentes ; courbe qui est dite la *développée* de la proposée, et qui est évidemment le lieu géométrique des centres de courbure de tous ses points ; enfin son rayon de courbure, en un point quelconque, n'est autre que la normale qui répond à ce point, terminée à son point de contact avec la développée.

Dans les points où la courbure de la courbe après avoir cru, commence à décroître, c'est-à-dire, dans les points où cette courbure est *maximum*, et, par suite, le rayon de courbure *minimum*, le cercle osculateur est évidemment enveloppé par la courbe, de part et d'autre du point de contact ; mais dans les points où, au contraire, cette courbure est *minimum*, et, par suite, le rayon de courbure *maximum*, c'est au contraire le cercle osculateur qui enveloppe la courbe de part et d'autre du point de contact ; de sorte que, dans l'un comme dans l'autre cas, le cercle osculateur touche la courbe sans la couper.

On peut encore envisager la chose sous un autre point de vue qui conduit exactement aux mêmes conséquences.

Soit M l'un quelconque des points d'une courbe plane, par lequel soit menée à cette courbe une normale indéfinie. De l'un quelconque C des points de cette normale pris pour centre, et avec la distance CM pour rayon, soit décrit un cercle ; ce cercle aura évidemment, au point M, même tangente que la courbe ; et, pour cette raison, on dira qu'il lui est tangent en ce point ; d'où l'on voit, à cause de l'indétermination du point C sur la normale, qu'une courbe peut avoir, en chacun de ses points, une infinité de cercles qui lui soient tangens en ce point, lesquels, comme l'on voit, ont tous leur centre sur la normale à la courbe au même point.

De tous les cerles qui touchent la proposée en M, ne considérons que la série de ceux qui ont leur centre du côté de la concavité de cette courbe, et qui ont conséquemment leur courbure dans le même sens que la sienne. On pourra toujours, pour l'un d'eux, prendre le point C assez voisin du point M pour que ce cercle, du moins dans le voisinage du point de contact, soit, de part et d'autre de ce point, enveloppé par la courbe. On pourra toujours, au contraire, pour un autre cercle, éloigner assez le point C du point M pour que, de part et d'autre du point de contact, ce soit le cercle qui enveloppe la courbe.

Si l'on conçoit ensuite que l'on fasse marcher le point C, sur la normale, entre ces deux positions, on devra rencontrer une position intermédiaire pour laquelle le cercle tangent aura, à la fois, une courbure plus grande que celle de la courbe d'un côté du point M, mais moindre que la courbure de cette courbe de l'autre côté de ce point. Un tel cercle tangent sera donc enveloppé par la courbe, d'un côté du point de contact, tandis qu'au contraire ce sera lui qui l'enveloppera de l'autre côté de ce point ; il sera donc, à la fois, tangent et sécant à la courbure au point M, et sera conséquemment le cercle osculateur de cette courbe en ce point. Son centre et son rayon en seront donc, pour le même point M, le centre et le rayon de courbure de la courbe en ce point. Son centre sera donc le point de la développée correspondant au point M; et l'on voit même que ceci offrirait, au besoin, un moyen graphique de déterminer, à peu près, tant de points qu'on voudrait de la développée d'une courbe proposée.

Mais les choses ne se passeraient plus de la sorte si le point M était choisi sur la courbe, de manière qu'en ce point sa courbure fût *maximum* ou *minimum*. Alors, dans la série des cercles dont il vient d'être question, on passerait, sans intermédiaire, d'un cercle enveloppé par la courbe des deux côtés du point de contact à un autre cercle qui l'envelopperait, au contraire, de part et d'autre de ce point; et la position du point C sur la normale où la transition aurait lieu serait alors le centre de courbure du point correspondant de la courbe proposée.

Dans le cas particulier où le point M serait un point d'inflexion, il est visible que le centre de courbure devrait être porté sur la normale à une distance infinie, de part ou d'autre de ce point; de sorte que la normale à un point d'inflexion d'une courbe est une asymptote de sa développée qui a ainsi au moins deux fois autant de branches infinies que cette courbe a de points d'inflexion.

XII. On voit, d'après ce qui précède, que, si l'on veut déterminer quels sont les points de la courbe (1) pour lesquels le rayon de courbure a une longueur donnée r, il ne s'agira que de considérer x' et y' dans les équations (4) et (51), comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. On peut dire, en conséquence, que l'équation

$$\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy}\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}^2r^2-\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}^3=0\,,\quad(60)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée (1) aux points pour lesquels son rayon de courbure est égal à r.

La formule (51) prouve d'ailleurs que, aux points d'inflexion de la courbe (1), pour lesquels les équations (13) sont toutes trois satisfaites, le rayon de courbure devient infini ; de sorte qu'alors le cercle osculateur se confond avec la tangente. On voit aussi que la formule (51) est en défaut pour tous les points où les deux coefficiens différentiels $\frac{dS'}{dx'}$ et $\frac{dS'}{dy'}$ sont nuls ; et on ne doit pas en être surpris, puisqu'alors il peut passer par le point (x', y') au moins deux branches de la courbe, dont chacune doit avoir son rayon de courbure. Ce rayon r doit donc alors être donné par une équation d'un degré supérieur au premier, équation que l'on obtiendrait facilement par l'application des principes qui nous ont constamment dirigés dans tout ce qui précède, mais à la poursuite de laquelle nous ne nous arrêterons pas.

En éliminant x' et y' entre l'équation (2) et les équations (50) du centre de courbure du point (x', y'), l'équation résultante en x et y sera celle du lieu des centres de courbure de tous les points de la courbe (1), c'est-à-dire, l'équation de la développée de cette courbe. Au surplus, il revient au même et il est plus simple de dire que l'équation de la développée de la courbe (1) est le résultat de l'élimination de x' et y' entre l'équation (2) et la double équation

$$\frac{\frac{dS'}{dx'}}{x-x'}=\frac{\frac{dS'}{dy'}}{y-y'}=-\frac{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2}. \qquad (61)$$

Veut-on savoir enfin quels sont les points de courbe (1) pour lesquels la courbure de cette courbe est *maximum* ou *minimum* ? La question se réduira à rendre l'un ou l'autre la fonction r des deux variables x' et y', liées entre elles par la relation (2) ; il faudra donc, suivant ce qui a été expliqué (tom. XX, pag. 337) égaler d'abord à zéro la variation de la valeur (51) de r, prise à la fois par rapport à ces deux variables, ce qui donnera, en supprimant les accens qui, dans cette rencontre, ne sont d'aucune utilité,

$$3\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\,\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}\left\{\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dx^2}\delta x+\left(\frac{dS}{dy}\delta x+\frac{dS}{dx}\delta y\right)\frac{d^2S}{dxdy}+\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dy^2}\delta y\right\}$$

$$-2\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}\right\}\left(\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^3S}{dx^3}\delta x+\frac{dS}{dy}\left(\frac{dS}{dy}\delta y-2\frac{dS}{dx}\delta x\right)\frac{d^3S}{dx^2dy}\right.$$

$$\left.+\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS}{dx}\delta x-2\frac{dS}{dy}\delta y\right)\frac{d^3S}{dxdy^2}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^3S}{dy^3}\delta y\right\};$$

mais l'équation (1) donne

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y=0\,;$$

ce qui fait d'abord disparaître la seconde partie du premier membre de la précédente; substituant dans l'équation restante la valeur de δx ou de δy tirée de cette dernière, l'autre variation en disparaîtra aussi, et l'on obtiendra, pour solution du problème,

$$3\left\{\frac{dS}{dy}\left(\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dx^2}+\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}\right)-\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dy^2}+\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dxdy}\right)\right\}$$

$$\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\,\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^3\frac{d^3S}{dx^3}-3\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^3S}{dx^2dy}+3\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{dS}{dy}\,\frac{d^3S}{dxdy^2}-\left(\frac{dS}{dy}\right)^3\frac{d^3S}{dy^3}\right\};\quad(62)$$

c'est-à-dire que cette équation est celle d'une courbe qui coupe la proposée (1) aux points où sa courbure est *maximum* ou *minimum*. Ayant déterminé, par la combinaison de cette équation avec l'équation (1), les coordonnées des points pour lesquels cette circonstance a lieu, la substitution des valeurs de ces coordonnées, pour x' et y, dans la formule (51), fera connaître la grandeur du rayon de courbure en ces points.

XIII. En négligeant, dans l'équation (4), les termes de plus d'une dimension en t et u, nous sommes parvenus à l'équation (6) de la tangente à la courbe (1), au point (x', y') de cette courbe. On pourrait, pour plus de précision, ne rejeter, dans cette équation (4), que les termes de plus de deux dimensions en t et u, ce qui conduirait à l'équation

$$o=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2\right), \quad (63)$$

qui appartient conséquemment à celle de toutes les lignes du second ordre qui passent par l'origine des t et u qui se moule le plus exactement sur la courbe (1), en ce point. A cause de cette propriété, une telle courbe est dite l'*osculatrice du second ordre* de la proposée au point où elle la touche. En raisonnant comme nous l'avons fait pour la tangente que, par analogie, on pourrait appeler *osculatrice du premier ordre*, on s'assurera facilement qu'en général l'osculatrice du second ordre d'une courbe, en l'un de ses points, touche et coupe à la fois cette courbe en ce point.

En repassant au système rectangulaire, au moyen des formules (5), on pourra dire que l'équation de l'osculatrice du second ordre de la courbe (1), en un quelconque (x', y') de ses points, est

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}(x-x')^2+\frac{d^2S'}{dy'^2}(y-y')^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+2\frac{dS'}{dx'}(x-x')+2\frac{dS'}{dy'}(y-y')=0. \quad (64)$$

On voit, au surplus, que, si le point (x', y') était un point double, cette osculatrice se réduirait à deux droites ou à un point; et que, si ce même point (x', y') était un point d'inflexion, l'osculatrice ne serait autre que la tangente en ce point.

On pourrait aussi ne supprimer, dans l'équation (4), que les termes de plus de trois dimensions en t et u, et l'on obtiendrait ainsi ce qu'on appelle l'*osculatrice du troisième ordre* de la proposée, en un quelconque de ses points, c'est-à-dire, celle de toutes les courbes du troisième ordre qui, en ce point, se moule le plus exactement sur cette courbe en ce point, et de laquelle on prouverait que, dans le voisinage du point de contact, elle est toute située d'un même côté de la proposée, qu'elle touche ainsi sans la couper. On voit aisément par là ce que seraient les *osculatrices des ordres supérieurs*, lesquelles couperaient et toucheraient, à la fois, la proposée, ou bien seraient entièrement situées d'un même côté de cette courbe, suivant qu'elles seraient d'un ordre pair ou d'un ordre impair.

XIV. Les formules auxquelles nous sommes parvenus dans tout ce qui précède sont un peu plus compliquées que celles qu'on emploie communément à la résolution des diverses questions que nous avons traitées; mais, outre qu'elles en sont aussi plus symétriques, leur apparente complication en rend l'application plus facile. En ne supposant pas, en effet, que l'équation proposée soit résolue par rapport à une des deux coordonnés x et y, il sera toujours permis de supposer que S est une fonction rationnelle et entière de ces deux coordonnées; ce qui rendra les divers coefficiens différentiels très-faciles à obtenir. Au surplus, rien ne sera plus aisé que de revenir de nos formules aux formules ordinaires; il ne s'agira pour cela que d'y changer d'abord respectivement $\frac{dS}{dx}$, $\frac{d^2S}{dx^2}$, $\frac{d^3S}{dx^3}$, ... en $-\frac{dy}{dx}$, $-\frac{d^2y}{dx^2}$, $-\frac{d^3y}{dx^3}$, ..., d'y poser ensuite $\frac{dS}{dy}=0$, et d'y faire enfin tous les autres coefficiens différentiels nuls.

XV. Terminons en appliquant ces généralités à la ligne du second ordre donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \,. \qquad \text{(a)}$$

On aura d'abord, pour le point (x', y'),

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F=0 \,, \qquad \text{(b)}$$

et de là

$$\left.\begin{array}{llll}
\frac{dS'}{dx'}=2(Ax'+Cy'+D) \,, & & \frac{dS'}{dy'}=2(By'+Cx'+E) \,, & \\
\frac{d^2S'}{dx'^2}=2A \,, & \frac{d^2S'}{dx'dy'}=2C \,, & \frac{d^2S'}{dy'^2}=2B \,, & \\
\frac{d^3S'}{dx'^3}=0 \,, & \frac{d^3S'}{dx'^2dy}=0 \,, & \frac{d^3S'}{dx'dy'^2}=0 \,, & \frac{d^3S'}{dy'^3}=0 \,.
\end{array}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Cela posé, la formule (17) donnera, pour l'équation de la tangente en (x', y'),

$$(Ax'+Cy'+D)(x-x')+(By'+Cx'+E)(y-y')=0 \,;$$

ou bien

$$Ax'x+By'y+C(x'y+y'x)+Dx+Ey=Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey' \,,$$

ou, en ajoutant l'équation (b) et réduisant,

$$(Ax'+Cy+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0 \quad . \quad \text{(d)}$$

La formule (19) donne pour l'équation de la corde de contact de l'angle circonscrit à la courbe (a), ayant son sommet en (a, b), en ayant égard à l'équation (a),

$$(Aa+Cb+D)x+(Bb+Ca+E)y+(Da+Eb+F)=0 \quad . \quad \text{(e)}$$

La formule (22) montre que si, à la courbe (a), on mène deux tangentes parallèles à une droite ayant pour équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \quad ,$$

la droite qui joindra les deux tangentes aura pour équation

$$(aA+bC)x+(bB+aC)y+(aD+bE)=0 \quad . \quad \text{(f)}$$

Si l'on veut mener une tangente commune à deux branches de la courbe (a), on aura (26), pour déterminer les deux points de contact, outre les équations (a) et (b), la double équation

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{Ax^2+By^2+2Cxy+Dx+Ey}{Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey'} \quad ,$$

laquelle devient simplement, au moyen des équations (a) et (b),

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{Dx+Ey+F}{Dx'+Ey'+F} \quad ;$$

tirant de cette double équation les valeurs de x' et y' pour les substituer dans l'équation (b), et ayant égard à l'équation (a), on trouvera pour la courbe qui coupe la proposée aux points où elle est touchée par des tangentes communes à deux de ses branches,

$$B(Ax+Cy+D)^2-2C(Ax+Cy+D)(By+Cx+E)+A(By+Cx+E)^2=0\ ; \quad \text{(g)}$$

équation qui appartient aux deux asymptotes si la courbe est une hyperbole, et qui n'exprime rien dans le cas contraire. Les asymptotes d'une hyperbole sont, en effet, des tangentes communes à ses deux branches.

La formule (27) donne, pour l'équation de la normale à la courbe (a), par le point (x', y'), pris sur cette courbe,

$$(By'+Cx'+E)(x-x')-(Ax'+Cy'+D)(y-y')=0\ ; \quad \text{(h)}$$

les deux constantes x', y' étant liées entre elles par la relation (b).

D'après la formule (28), l'équation

$$(By+Cx+E)(x-a)-(Ax+Cy+D)(y-b)=0\ , \quad \text{(i)}$$

est celle d'une courbe coupant la courbe (a) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées par le point (a, b) de son plan ; et comme cette équation du second degré n'est point, en général, susceptible d'abaissement, il s'ensuit que, de l'un quelconque des points du plan d'une ligne du second ordre, on peut, généralement parlant, abaisser jusqu'à quatre normales à cette courbe.

La formule (29) donne l'équation

$$(bA-aC)x-(aB-bC)y+(bD-aE)=0\ , \quad \text{(k)}$$

pour celle d'une droite qui coupe la courbe (a) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées parallélement à une droite donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ ;$$

ces normales sont donc au nombre de deux seulement.

D'après la formule (31), si l'on veut mener une normale commune à deux branches de la courbe (a), on aura, pour déterminer les deux points (x, y), (x', y') de cette courbe où elle se termine, outre les équations (a) et (b), la double équation

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{x(By+Cx+E)-y(Ax+Cy+D)}{x'(By'+Cx'+E)-y'(Ax'+Cy'+D)}\ ;$$

entre laquelle et l'équation (b), éliminant x' et y', et ayant égard à l'équation (a), on obtiendra pour solution du problème l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(By+Cx+E)\{A(Ax+Cy+D)+C(By+Cx+E)\}\\ -(Ax+Cy+D)\{B(By+Cx+E)+C(Ax+Cy+D)\}\end{array}\right\}=0\ ;\quad (l)$$

équation que l'on reconnaîtra facilement pour celle des deux diamètres principaux de la courbe (a); lesquels sont, en effet, les deux seules normales communes à deux branches de cette courbe.

Les formules (32) et (35) montrent que, pour que la courbe (a) ait des points doubles, il faut qu'on ait à la fois

$$Ax+Cy+D=0\ ,\qquad By+Cx+E=0\ ;\qquad (m)$$

mais l'équation (a) pouvant être écrite ainsi,

$$x(Ax+Cy+D)+y(By+Cx+E)+(Dx+Ey+F)=0\ .$$

les deux autres la réduisent simplement à

$$Dx+Ey+F=0\ ;$$

éliminant donc x et y entre ces trois équations, on trouvera, pour la condition qui fait acquérir des points doubles à la courbe (a),

$$D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)=0\ ; \qquad \text{(n)}$$

cette équation étant supposée satisfaite, les points doubles seront donnés par les équations (m) ; d'où l'on voit qu'il n'y en aura jamais plus d'un. Il y aura d'ailleurs, en ce point, deux branches de courbe qui se couperont ou se toucheront, ou bien ce point sera tout à fait isolé (35) suivant que la quantité

$$C^2-AB\ ,$$

sera positive, nulle ou négative. On reconnaît, en effet, que les équations (m) sont celles du centre de la courbe (a) et que la condition (n) est celle qui exprime que cette courbe se réduit à son centre ou à deux droites qui se coupent en ce point. Quant aux points triples, il est visible qu'une ligne du second ordre n'en saurait offrir.

Les formules (50) donnent pour les équations du centre de courbure de la courbe (a), en un quelconque (x', y') de ses points,

$$\left.\begin{aligned} x&=x'-\frac{(Ax'+Cy'+D)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ,\\ y&=y'-\frac{(By'+Cx'+E)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ; \end{aligned}\right\}$$

et pour son rayon de courbure en (x, y),

$$r=\frac{\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ;$$

sur quoi on peut remarquer que le dénominateur commun à ces formules revient à

$$B(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)$$

$$-(C^2-AB)(Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F)\ ,$$

dont la dernière ligne s'évanouit en vertu de l'équation (b); de sorte que les coordonnées du centre de courbure de la courbe (a) au point (x' , y') sont simplement

$$\left.\begin{aligned} x&=x'-\frac{(Ax'+Cy'+D)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ , \\ y&=y'-\frac{(By'+Cx'+E)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ ; \end{aligned}\right\}\ (o)$$

et son rayon de courbure au même point ,

$$r=\frac{\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ . \qquad (p)$$

Nous ne nous occuperons pas de la recherche de la développée de la courbe (a) dont l'équation serait probablement fort compliquée. Nous remarquerons seulement que , pour la courbe (a) , l'équation (62) de la courbe qui en coupe une autre proposée aux points où la courbure de cette courbe est *maximum* ou *minimum* , a son second membre nul ; et , comme son premier membre est le produit de deux facteurs , on peut y satisfaire en égalant l'un ou l'autre de ces facteurs à zéro. On trouve alors , par les substitutions, ou l'équation (l) commune aux deux axes de la courbe ou l'équation (g) commune à ses deux asymptotes, si toutefois cette courbe est une hyperbole.

Quant à l'osculatrice du second ordre de la courbe (a), il est manifeste qu'en chacun de ses points cette osculatrice n'est autre que la courbe elle-même.