
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Arithmétique. Sur un complément que réclament les élémens du calcul

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 117-132

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__117_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1830-1831, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE.

*Sur un complément que réclament les élémens
du calcul ;*

Par M. GERGONNE.

~~~~~

EXPRIMER exactement , par une fraction , une grandeur moindre que son unité de mesure est un problème qui , lorsqu'il est possible , est susceptible d'une infinité de solutions , puisque , lorsqu'on a obtenu une fraction qui le résout , cette fraction ne change pas de valeur en multipliant ses deux termes par quelque nombre entier que ce puisse être.

Réduire des fractions proposées au même dénominateur est également un problème susceptible d'une infinité de solutions , puisque , dès que , par quelque procédé que ce puisse être , on est parvenu à amener les fractions proposées à cette forme , elles la conservent encore lorsqu'on multiplie les deux termes de chacune d'elles par un même nombre quelconque.

Or , la raison dit , que toutes les fois qu'un problème peut être résolu de plusieurs manières , et qu'une seule de ses solutions est demandée , c'est à la plus simple de toutes qu'on doit donner la préférence. Lors donc qu'on propose , soit d'exprimer en fraction une grandeur moindre que l'unité ; soit de réduire au même dénominateur des fractions données , on est raisonnablement fondé à exiger que , dans l'un comme dans l'autre cas , les fractions auxquelles on parviendra soient exprimées aussi simplement que la nature du problème pourra le comporter.

C'est là ce qu'on fait , en effet , lorsqu'il s'agit d'exprimer en fraction une grandeur moindre que l'unité , ou , ce qui revient au même , lorsqu'il s'agit d'exprimer numériquement le rapport entre deux grandeurs homogènes ; et c'est même très-probablement le désir d'exprimer constamment ce rapport de la manière la plus simple qui a donné naissance à la théorie du plus grand commun diviseur , dont les besoins de la géométrie et de l'analyse ont fait étendre ensuite les applications à deux lignes droites , à deux arcs de même rayons et enfin à deux polynomes.

Mais on peut aussi avoir à exprimer le rapport entre plus de deux grandeurs homogènes , et désirer également d'obtenir ce rapport sous la forme la plus simple ; or , les élémens , même les plus complets , demeurent tout à fait muets sur la manière de résoudre ce problème.

En outre , la méthode que l'on donne , dans tous les traités , comme *méthode normale* , pour la réduction des fractions au même dénominateur , est rarement propre à donner les fractions transformées sous la forme la plus simple. A la vérité , dans plusieurs de ces ouvrages , on fait remarquer que souvent la forme particulière des fractions proposées permet d'obtenir des fractions plus simples que celles auxquelles conduit l'application du procédé ordinaire ; mais , au lieu de donner sur ce sujet des préceptes généraux , on se borne , pour l'ordinaire , à un exemple unique , et on se repose , pour le surplus , sur l'adresse et l'intelligence du calculateur.

Étrange bizarrerie ; on réprimanderait durement un élève qui annoncerait , comme résultat final de quelque recherche , que deux longueurs proposées sont entre elles comme les nombres 78897 et 82654 , attendu que le rapport entre ces deux nombres peut être remplacé par le rapport plus simple de 21 à 22 ; et , bien que le rapport entre les trois nombres 78897 , 82654 , 111265 , puisse également être remplacé par le rapport plus simple entre les trois nombres 4641 , 4862 , 6545 , on ne saurait néanmoins

faire aucun reproche fondé à ce même élève si , au lieu de dire que trois longueurs sont entre elles comme ces trois derniers nombres , il disait qu'elles sont entre elles dans le rapport des trois premiers , attendu qu'on ne donne nulle part des préceptes qui enseignent à passer des uns aux autres.

Pareillement on accuserait à bon droit un élève d'être bien peu familier avec la science des nombres , s'il disait d'une longueur qu'elle est les  $\frac{10290}{11025}$  de son unité , parce qu'en effet cette fraction peut être remplacée par la fraction très-simple  $\frac{14}{15}$  ; mais si , ayant à réduire au même dénominateur les trois fractions  $\frac{14}{15}$  ,  $\frac{20}{21}$  ,  $\frac{34}{35}$  , il donnait comme fractions transformées , au lieu des fractions assez simples  $\frac{98}{105}$  ,  $\frac{100}{105}$  ,  $\frac{102}{105}$  , les fractions compliquées  $\frac{10290}{11025}$  ,  $\frac{10500}{11025}$  ,  $\frac{10710}{11025}$  , il n'encourait aucun reproche , parce qu'en effet ce sont les trois dernières que donne l'application du seul procédé que l'on enseigne complètement dans les livres.

On dira peut-être qu'un élève tant soit peu exercé et intelligent saura bientôt comment il faut s'y prendre pour réduire des fractions au même dénominateur aux moins de frais possible , et je veux bien l'accorder pour le moment ; mais un élève tant soit peu exercé et intelligent saura bientôt aussi réduire une fraction à son expression la plus simple ; et pourtant on ne se croit pas pour cela dispensé d'enseigner cette réduction dans les livres d'arithmétique. D'ailleurs ceux qui étudient sont loin d'être tous intelligens , et c'est pour le plus grand nombre des lecteurs que les élémens doivent être écrits.

Dira-t-on qu'après tout , lorsqu'on a besoin d'ajouter ou même seulement de comparer entre elles plusieurs fractions , l'essentiel est uniquement de les amener à avoir un même dénominateur ,

quel qu'il soit, et qu'il importe assez peu d'ailleurs que ce dénominateur commun soit un peu plus grand ou un peu plus petit? Je veux bien encore, pour le moment, faire cette concession; mais ne sera-t-on pas dès lors contraint de m'accorder aussi que, lorsqu'il s'agit d'exprimer par une fraction une quantité moindre que l'unité, l'essentiel est uniquement que cette fraction en soit l'expression exacte, et qu'il importe assez peu d'ailleurs que ses deux termes soient un peu plus grands ou un peu plus petits? Et ne voilà-t-il pas dès lors l'art de réduire les fractions à leurs moindres termes, et conséquemment la théorie du plus grand commun diviseur, d'où cette réduction dépend, qui devront être considérés comme des superfluités qu'on pourra, sans grave inconvénient, bannir des élémens.

Mais, objectera-t-on, en ne réduisant pas constamment les fractions à leurs moindres termes, on courrait souvent le risque d'introduire dans les équations des racines qui leur seraient étrangères. Si, par exemple, on admettait, sans simplification, l'équation

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}=6;$$

en chassant le dénominateur, transposant et réduisant, il en résulterait l'équation du second degré

$$5x^2-19x+12=0;$$

tandis qu'en réduisant préalablement à ses moindres termes la fraction qui forme le premier membre de l'équation proposée, cette équation devient simplement

$$\frac{x-2}{x-1}=6,$$

qui donne, en chassant le dénominateur, transposant et réduisant, la simple équation du premier degré

$$5x-4=0,$$

qui est la véritable équation du problème.

Je me rends très-volontiers à cette objection ; j'accorde que toute négligence de calcul , dont l'effet peut être d'introduire dans une équation des racines qui lui soient étrangères , est une faute majeure qu'on ne saurait tolérer , et j'en tire une nouvelle preuve en faveur de la thèse que je défends. Soit , en effet , l'équation

$$\frac{3}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-5x+6} = 6 ;$$

en réduisant au même dénominateur , par la méthode réputée normale , les trois fractions dont se compose son premier membre , et prenant ensuite la somme des fractions transformées , elle devient , en divisant par 2 ,

$$\frac{3x^4-25x^3+75x^2-95x+42}{x^6-12x^5+58x^4-144x^3+193x^2-132x+26} = 3 ;$$

d'où , en chassant le dénominateur , transposant et réduisant ,

$$3x^6-12x^5+171x^4-407x^3+504x^2-301x+66=0 .$$

Mais , suivant le procédé réputé exceptionnel , on réduit aussi au même dénominateur les trois fractions qui forment le premier membre de la proposée , en multipliant les deux termes de la première par  $x-3$  , ceux de la seconde par  $x-2$  , et ceux de la troisième par  $x-1$ . Prenant alors la somme de ces fractions , il viendra , en divisant par 2 ,

$$\frac{3x-7}{x^3-6x^2+11x-6} = 3 ;$$

d'où en chassant le dénominateur , transposant et réduisant ,

$$3x^3 - 18x^2 + 30x - 11 = 0 ;$$

véritable équation du problème , qui n'est que du troisième degré seulement ; de sorte que , par l'effet de l'application du premier des deux procédés , trois racines étrangères ont été introduites.

C'est donc en vain qu'on tenterait de se dissimuler qu'il y a sur ce point , dans les élémens , une omission grave , une lacune manifeste qui , sans doute , aurait été remplie depuis long-temps si l'on n'avait pas la mauvaise habitude de faire des livres avec d'autres livres , et d'écrire plutôt sous la dictée de la routine que sous l'inspiration de la philosophie. Il y a déjà plus de trente ans que , choqué de cette omission , je me suis attaché à y suppléer dans mon enseignement. Si jusqu'ici je n'en ai rien écrit , c'est que la disparate me semblait tellement choquante , et en même temps si facile à corriger , que j'espérais toujours que , dans quelqu'un des nombreux traités élémentaires qui ont paru depuis cette époque , on songerait enfin à y porter remède. Constamment trompé dans mon attente , je me résigne enfin , à regret , à faire ici moi-même ce que j'aurais préféré voir faire par quelqu'un ayant autorité dans la science.

Ce qu'on va lire sur ce sujet est , pour le fond , une des notes que j'avais rédigées , en 1803 , pour une traduction des *Disquisitiones arithmeticae* de M. GAUSS , dont je m'occupais alors , et que la publication de celle de M. Pouillet-Delisle m'a fait ensuite abandonner.

1. J'appelle *diviseur* d'un nombre , tout autre nombre qui se trouve contenu dans celui-là un nombre de fois exactement. Ainsi , par exemple , 4 est diviseur de 12 , parce que 12 le contient trois fois exactement.

2. J'appelle *dividende* d'un nombre , tout autre nombre qui contient celui-là un nombre de fois exactement. Ainsi , par exemple ,

12 est dividende de 4 , parce que 4 y est contenu trois fois.

3. On voit qu'ici les mots diviseur et dividende sont employés sous une acception plus restreinte que celle qu'on y attache communément. On voit aussi que si , de deux nombres , le premier est diviseur du second , le second sera nécessairement dividende du premier , et réciproquement.

4. Tout nombre a toujours au moins deux diviseurs ; savoir : l'unité et lui-même. Un nombre peut n'avoir que ces seuls diviseurs , comme il peut fort bien en avoir d'autres , toujours compris entre ces deux-là. Par exemple , 5 n'a d'autres diviseurs que 1 et 5 ; tandis que 6 , outre les diviseurs 1 et 6 , a encore les deux diviseurs 2 et 3.

5. Un nombre a toujours une infinité de dividendes , dont le plus petit est ce nombre lui-même. Les autres en sont les multiples à l'infini.

6. Un nombre est dit *diviseur commun* à plusieurs autres , lorsqu'il est , en particulier , diviseur de chacun d'eux. Tel est , par exemple , le nombre 6 , par rapport aux trois nombres 24 , 42 , 60.

7. Un nombre est dit *dividende commun* à plusieurs autres , lorsqu'il est , en particulier , dividende de chacun d'eux. Tel est , par exemple , le nombre 60 , par rapport aux trois nombres 10 , 12 , 15.

8. Des nombres , pris au hasard , ont toujours au moins l'unité pour diviseur commun. Ils peuvent n'avoir que ce seul diviseur commun ; comme ils peuvent aussi fort bien en avoir d'autres , dont aucun d'ailleurs ne saurait (4) être plus grand que le plus petit d'entre eux. D'où l'on voit que le nombre des diviseurs communs , à plusieurs nombres proposés , est nécessairement limité , et qu'il en est toujours un qui est le plus grand de tous. Tel est , par exemple , le nombre 6 , par rapport aux trois nombres 24 , 42 , 60.

9. Des nombres , pris au hasard , ont toujours une infinité de dividendes communs ; car de ce nombre sont leur produit et tous ses multiples. Mais ils peuvent souvent en avoir de



plus petits que leur produit, lesquels toutefois ne sauraient (5) être moindres que le plus grand d'entre eux. D'où l'on voit que, parmi les dividendes communs à plusieurs nombres, il en est toujours un qui est le plus petit de tous. Tel est, par exemple, le nombre 60, par rapport aux nombres 10, 12, 15.

10. Des nombres sont dits *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité. Tels sont, par exemple, les quatre nombres 24, 25, 27, 30.

11. *THÉORÈME. Si, en divisant plusieurs nombres donnés par un de leurs diviseurs communs, on obtient des quotiens qui ne soient pas premiers entre eux; ces nombres auront au moins un autre diviseur commun, plus grand que celui-là.*

*Démonstration.* Soit  $d$  un diviseur commun aux nombres  $G, H, K, \dots, T, U, V$ , dont la division, par ce diviseur, donne les quotiens, non premiers entre eux,  $g, h, k, \dots, t, u, v$ ; on aura ainsi

$$G = gd, H = hd, K = kd, \dots, T = td, U = ud, V = vd;$$

or, si l'on pose  $dd = D > d$ , on tirera de là

$$\frac{G}{D} = g, \quad \frac{H}{D} = h, \quad \frac{K}{D} = k, \dots, \frac{T}{D} = t, \quad \frac{U}{D} = u, \quad \frac{V}{D} = v;$$

d'où l'on voit que  $D > d$  sera un autre diviseur commun, comme nous l'avions annoncé.

12. Donc, si l'on divise plusieurs nombres donnés par leur *plus grand diviseur commun*, on obtiendra des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était autrement, on prouverait (11) qu'il existe un autre diviseur commun plus grand que celui-là.

13. *THÉORÈME. Si, en divisant tour à tour plusieurs nombres donnés par deux de leurs diviseurs communs, l'un de ces diviseurs donne des quotiens premiers entre eux, celui-là sera nécessairement le plus grand des deux.*

*Démonstration.* Soient  $d$  et  $d'$  deux diviseurs communs aux nombres  $G, H, K, \dots T, U, V$ ; supposons qu'en les divisant par  $d$  on obtienne les quotiens respectifs  $g, h, k, \dots t, u, v$ , et qu'en les divisant par  $d'$  on obtienne les quotiens respectifs  $g', h', k', \dots t', u', v'$ ; il en résultera

$$G = gd = g'd', H = hd = h'd', K = kd = k'd', \dots T = td = t'd', U = ud = u'd', V = vd = v'd',$$

et par suite

$$\frac{gd}{d'} = g', \quad \frac{hd}{d'} = h', \quad \frac{kd}{d'} = k', \quad \dots \quad \frac{td}{d'} = t', \quad \frac{ud}{d'} = u', \quad \frac{vd}{d'} = v';$$

d'où l'on voit d'abord que les produits  $gd, hd, kd, \dots td, ud, vd$ , doivent être tous divisibles par  $d'$ , et doivent conséquemment contenir toutes les sortes de facteurs premiers de  $d'$ , et au moins en même nombre que dans  $d'$ , pour chaque sorte.

Mais si les quotiens  $g, h, k, \dots t, u, v$  sont premiers entre eux, aucun des facteurs premiers de  $d'$  ne pourra se trouver à la fois dans tous ces quotiens; afin donc que les produits  $gd, hd, kd, \dots td, ud, vd$  soient tous divisibles par  $d'$ , il faudra que toutes les sortes de facteurs premiers de  $d'$  se trouvent dans  $d$ , et au moins en même nombre pour chaque sorte, ce qui donnera  $d > d'$ , comme nous nous l'avions annoncé. On voit en outre que  $d$  est multiple de  $d'$ .

14. Donc, deux diviseurs communs à plusieurs nombres ne sauraient donner, l'un et l'autre, des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était ainsi, on pourrait prouver du plus petit de ces diviseurs qu'il est plus grand que l'autre.

15. Donc si, en divisant plusieurs nombres par un de leurs diviseurs communs, on obtient des quotiens premiers entre eux, ce diviseur commun sera le plus grand de tous, car, s'il ne l'était pas, le plus grand diviseur commun donnerait aussi (12) des quotiens premiers entre eux; ce qui est impossible par ce qui précède.

17. *THÉORÈME.* Si, en divisant par plusieurs nombres donnés

Tom. XXI.

*un de leurs dividendes communs , les quotiens ne sont pas premiers entre eux , ces nombres auront au moins un autre dividende commun , plus petit que celui-là.*

*Démonstration.* Soit  $D$  un dividende commun aux nombres  $g, h, k, \dots t, u, v$ , qui, divisant ce dividende, donnent les quotiens non premiers entre eux  $G\Delta, H\Delta, K\Delta, \dots T\Delta, U\Delta, V\Delta$ ; on aura ainsi

$$D = gG\Delta = hH\Delta = kK\Delta = \dots tT\Delta = uU\Delta = vV\Delta ;$$

or, si l'on pose  $\frac{D}{\Delta} = d < D$ , on tirera de là

$$d = gG = hH = kK = \dots = tT = uU = vV ;$$

d'où l'on voit que  $d < D$  sera un autre dividende commun, comme nous l'avions annoncé.

18. Donc, si l'on divise par plusieurs nombres donnés leur plus *petit dividende commun* (\*), on obtiendra des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était autrement, on prouverait (17) qu'il existe un autre dividende commun plus petit que celui-là.

19. *THÉORÈME.* Si, en divisant tour à tour par plusieurs nombres donnés deux de leurs dividendes communs, l'un de ces dividen-

(\*) Dans la traduction de l'ouvrage de M. Gauss, mentionné plus haut, j'avais hasardé de remplacer ces périphrases un peu longues: *plus grand diviseur commun, plus petit dividende commun*, par ces autres périphrases un peu plus courtes et tout aussi expressives: *diviseur maxime, dividende minime*. J'étais jeune alors, et je croyais qu'il suffisait à une innovation que l'on proposait d'être raisonnable pour la voir aussitôt accueillie. L'âge et l'expérience ne m'ont que trop bien appris depuis que ce n'est pas du fond d'une province qu'on peut tenter d'opérer des réformes, et qu'il faut absolument habiter la capitale pour oser innover avec quelque chance de succès, ne fût même que sur la figure des virgules. Plus timide encore que moi, M. Delisle a traduit l'expression *minimus communis dividuus* de M. Gauss par cette longue périphrase: *plus petit nombre divisible, à la fois, par, etc.*

des donne des quotiens premiers entre eux, celui-là sera nécessairement le plus petit des deux.

*Démonstration.* Soient  $D$  et  $D'$  deux dividendes communs aux nombres  $g, h, k, \dots t, u, v$ , qui, divisant le premier, donnent les quotiens respectifs  $G, H, K, \dots T, U, V$ , et qui, divisant le second, donnent les quotiens respectifs  $G', H', K', \dots T', U', V'$ ; il en résultera

$$D = gG = hH = kK = \dots = tT = uU = vV,$$

$$D' = gG' = hH' = kK' = \dots = tT' = uU' = vV',$$

et, par suite,

$$\frac{GD'}{D} = G', \quad \frac{HD'}{D} = H', \quad \frac{KD'}{D} = K', \quad \dots \quad \frac{TD'}{D} = T', \quad \frac{UD'}{D} = U', \quad \frac{VD'}{D} = V';$$

d'où l'on voit d'abord que les produits  $GD', HD', KD', \dots TD', UD', VD'$  doivent être tous divisibles par  $D$ , et doivent conséquemment contenir toutes les sortes de facteurs premiers de  $D$ , et au moins en même nombre que dans  $D$ , pour chaque sorte.

Mais si les quotiens  $G, H, K, \dots T, U, V$  sont premiers entre eux, aucun des facteurs premiers de  $D$  ne pourra se trouver à la fois dans tous ces quotiens; afin donc que les produits  $GD', HD', KD', \dots TD', UD', VD'$  soient tous divisibles par  $D$ , il faudra que toutes les sortes de facteurs premiers de  $D$  se trouvent dans  $D'$ , et au moins en même nombre pour chaque sorte, ce qui donnera  $D < D'$ , comme nous l'avions annoncé.

20. Donc deux dividendes communs à plusieurs nombres ne sauraient donner l'un et l'autre des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était ainsi, on pourrait prouver du plus grand de ces dividendes qu'il est plus petit que l'autre.

21. Donc si, en divisant par plusieurs nombres un de leurs dividendes communs, on obtient des quotiens premiers entre eux, ce dividende commun sera le plus petit de tous, car, s'il ne l'était pas, le plus petit dividende commun donnerait aussi (18) des

quotiens premiers entre eux, ce qui est impossible par ce qui précède.

22. *THÉORÈME. Le plus grand diviseur commun à plusieurs nombres ne change pas lorsqu'on remplace deux quelconques d'entre eux par leur plus grand diviseur commun.*

*Démonstration.* Soient  $G, H, K, \dots, T, U, V$  des nombres donnés; il s'agit de prouver que, si  $D$  est le plus grand diviseur commun à  $U$  et  $V$ , et que  $\delta$  soit le plus grand diviseur commun à  $G, H, K, \dots, T, D$ ;  $\delta$  sera aussi le plus grand diviseur commun aux nombres proposés.

Soient, en effet,  $u$  et  $v$  les quotiens qu'on obtient en divisant  $U$  et  $V$  par  $D$ ; ces quotiens seront (12) premiers entre eux, et l'on aura

$$U = uD, \quad V = vD.$$

Soient, en outre,  $g, h, k, \dots, t, d$ , les quotiens qu'on obtient en divisant respectivement  $G, H, K, \dots, T, D$  par  $\delta$ ; ces quotiens seront également premiers entre eux, et l'on aura

$$G = g\delta, \quad H = h\delta, \quad K = k\delta, \quad \dots, \quad T = t\delta, \quad D = d\delta;$$

de là on conclura

$$\frac{G}{\delta} = g, \quad \frac{H}{\delta} = h, \quad \frac{K}{\delta} = k, \quad \dots, \quad \frac{T}{\delta} = t, \quad \frac{U}{\delta} = ud, \quad \frac{V}{\delta} = vd;$$

or, aucun des facteurs premiers communs à  $g, h, k, \dots, t$ , si toutefois il en existe de tels, ne pourra se trouver dans  $d$ , qui est premier avec l'ensemble de ces nombres; il ne pourra d'ailleurs se trouver à la fois dans  $u$  et  $v$ , qui sont premiers entre eux; donc, aucun de ces facteurs premiers ne pourra se trouver à la fois dans  $ud$  et  $vd$ ; donc, en divisant les nombres proposés par  $\delta$ , on obtient des quotiens premiers entre eux; donc enfin  $\delta$  est (15), comme nous l'avions annoncé, le plus grand diviseur commun à tous ces nombres.

23. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres proposés, on pourra toujours ré-

duire à un de moins tant de nombres qu'on voudra, dont on aura à chercher le plus grand diviseur commun; on pourra donc, de proche en proche, réduire ces nombres à deux seulement.

25. *THÉORÈME.* *Le plus petit dividende commun à plusieurs nombres ne change pas lorsqu'on remplace deux quelconques d'entre eux par leur plus petit dividende commun.*

*Démonstration.* Soient  $g, h, k, \dots, t, u, v$  des nombres donnés; il s'agit de prouver que, si  $d$  est le plus petit dividende commun à  $u$  et  $v$ , et que  $\Delta$  soit le plus petit dividende commun à  $g, h, k, \dots, t, d$ ;  $\Delta$  sera aussi le plus petit dividende commun aux nombres proposés.

Soient, en effet,  $U$  et  $V$  les quotiens qu'on obtient en divisant  $d$  par  $u$  et  $v$ ; ces quotiens seront (18) premiers entre eux, et l'on aura

$$d = uU = vV :$$

Soient, en outre,  $G, H, K, \dots, T, D$  les quotiens qu'on obtient en divisant respectivement  $\Delta$  par  $g, h, k, \dots, t, d$ ; ces quotiens seront également premiers entre eux, et l'on aura

$$\Delta = gG = hH = kK = \dots = tT = dD ;$$

de là on conclura

$$\frac{\Delta}{g} = G, \quad \frac{\Delta}{h} = H, \quad \frac{\Delta}{k} = K, \quad \dots, \quad \frac{\Delta}{t} = T, \quad \frac{\Delta}{u} = UD, \quad \frac{\Delta}{v} = VD ;$$

or, au un des facteurs premiers communs à  $G, H, K, \dots, T$ , si toutefois il en existe de tels, ne pourra se trouver dans  $D$ , qui est premier avec l'ensemble de ces nombres; il ne pourra davantage se trouver dans  $U$  et  $V$  qui sont premiers entre eux; donc, aucun de ces facteurs premiers ne pourra se trouver, à la fois, dans  $UD$  et  $VD$ ; donc, en divisant  $\Delta$  par les nombres proposés, on obtient des quotiens premiers entre eux; donc enfin (21)  $\Delta$  est, comme nous l'avions annoncé, le plus petit dividende commun à tous ces nombres.

26. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus petit dividende commun à deux nombres proposés, on pourra toujours réduire à un de moins tant de nombres qu'on voudra, dont on aura à chercher le plus petit dividende commun; on pourra donc, de proche en proche, réduire ces nombres à deux seulement.

27. *THÉORÈME.* *Le quotient de la division du produit de deux nombres par leur plus grand diviseur commun est leur plus petit dividende commun.*

*Démonstration.* Soient  $G$  et  $H$  deux nombres dont  $d$  soit le plus grand diviseur commun; il s'agit de prouver que, si l'on a  $\frac{GH}{d} = D$ ,  $D$  sera le plus petit dividende commun aux deux nombres  $G$  et  $H$ .

Soient, en effet,  $g$  et  $h$  les quotiens qu'on obtient respectivement en divisant  $G$  et  $H$  par  $d$ ; ces quotiens seront (12) premiers entre eux et l'on aura

$$G = gd, \quad H = hd, \quad \text{d'où} \quad GH = gh d^2;$$

on aura donc  $D = gh d$ , et, par suite,

$$\frac{D}{G} = h, \quad \frac{D}{H} = g;$$

les quotiens qu'on obtient en divisant  $D$ , tour à tour, par  $G$  et  $H$  sont donc premiers entre eux;  $D$  est donc (21), comme nous l'avions annoncé, leur plus petit dividende commun.

28. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres proposés, on saura aussi déterminer le plus petit dividende commun à ces deux nombres.

29. *THÉORÈME.* *Le plus grand diviseur commun au plus petit de deux nombres et au reste de leur division, est aussi le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.*

*Démonstration.* Soient  $G$  et  $H$  ces deux nombres,  $H$  le plus petit,  $Q$  le quotient et  $R$  le reste de leur division. Il s'agit de prouver que, si  $d$  est le plus grand diviseur commun à  $H$  et  $R$ , ce sera aussi le plus grand diviseur commun à  $G$  et  $H$ .

On a , en effet ,

$$G=HQ+R ;$$

or , 1.<sup>o</sup> de ce que  $d$  divise  $H$  et  $R$  , il doit aussi diviser  $HQ$  , et conséquemment  $HQ+R$  ou  $G$  ; ainsi  $d$  est d'abord diviseur commun à  $G$  et  $H$ .

2.<sup>o</sup> Si , en outre ,  $G$  et  $H$  pouvaient avoir quelque autre diviseur commun  $D > d$  , ce diviseur , divisant  $G$  , devrait diviser  $HQ+R$  ; mais , divisant  $H$  , il devrait diviser  $HQ$  ; il faudrait donc aussi qu'il divisât  $R$  ; il serait donc diviseur commun à  $H$  et  $R$  , dont  $d$  ne serait plus dès lors , comme nous l'avons supposé , le plus grand diviseur commun.

30. On peut donc toujours ramener la recherche du plus grand diviseur commun à deux nombres donnés à la recherche du plus grand diviseur commun au plus petit et à un autre nombre plus petit que lui ; on pourra donc , de proche en proche , amener le plus petit des deux nombres à être zéro , et alors l'autre résoudra le problème.

31. Ainsi , en résumé , 1.<sup>o</sup> pour déterminer le plus grand diviseur commun , à deux nombres donnés , on divisera (30) le plus grand par le plus petit , le plus petit par le reste , le premier reste par le second , le second par le troisième , et ainsi de suite , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une division exacte , et alors le dernier diviseur sera le plus grand diviseur commun cherché.

2.<sup>o</sup> Pour déterminer le plus petit dividende commun à deux nombres seulement , il faudra (27) diviser le produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.

3.<sup>o</sup> S'agit-il enfin de déterminer soit le plus grand diviseur , soit le plus petit dividende commun à plus de deux nombres ; on cherchera d'abord (22) et (25) le plus grand diviseur ou le plus petit dividende commun à deux d'entre eux ; puis le plus grand diviseur ou le petit dividende commun au résultat obtenu et à un troisième nombre ; puis le plus grand diviseur ou le plus petit di-



vidende commun au second résultat et à un quatrième nombre , et ainsi de suite , jusqu'à ce qu'on ait opéré sur tous les nombres proposés , et le dernier résultat obtenu en sera le plus grand diviseur ou le plus petit dividende commun.

32. Si l'on veut simplifier , autant qu'il est possible , un rapport exprimé par plusieurs nombres , il faudra diviser tous les termes dont se compose ce rapport par leur plus grand diviseur commun.

33. Si l'on veut réduire des fractions proposées au même dénominateur , et obtenir des fractions transformées aussi simples que le comporte la nature du problème , il faudra multiplier les deux termes , de chacune des fractions proposées , par le quotient obtenu en divisant le plus petit dividende commun aux dénominateurs de toutes ces fractions par son dénominateur propre.

34. S'il s'agit de faire disparaître les dénominateurs des termes fractionnaires d'une équation de la manière la plus simple , il faudra multiplier les deux membres de cette équation par le plus petit dividende commun à tous ces dénominateurs.

35. Bien que , dans tout ce qui précède , il n'ait été question que de quantités numériques , tout ce que nous avons dit peut néanmoins être exactement appliqué soit aux lignes droites , soit aux arcs de même rayon , soit enfin à des polynomes.

Il faut seulement observer 1.<sup>o</sup> que le plus grand diviseur commun à des droites ou à des arcs de même rayon peut quelquefois se réduire à un point ; 2.<sup>o</sup> que leur plus petit dividende commun peut quelquefois être infini ; 3.<sup>o</sup> enfin , que la recherche du plus grand diviseur commun à deux polynomes exige le plus souvent quelques précautions particulières que nous ne mentionnons pas ici , parce qu'il en est traité fort au long dans la plupart des ouvrages élémentaires.