
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Statique. De l'équilibre de la chaînette sur une surface courbe

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 153-175

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__153_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STATIQUE.

De l'équilibre de la chaînette sur une surface courbe ;

Par M. BOBILLIER , professeur au Collège royal d'Amiens.



PROBLÈME. *Quelle est la courbe à double courbure qu'affecte un fil pesant et homogène , parfaitement flexible et inextensible , d'une longueur déterminée , fixé , par ses deux extrémités , en deux points d'une surface courbe donnée quelconque et abandonné à l'action de la pesanteur sur cette surface , qu'on suppose n'exercer sur lui aucun frottement ? Quelle est la tension du fil , en un quelconque des points de sa longueur ? et quelle est la pression normale qu'il exerce sur la surface courbe , en ce même point ?*

Solution. Soit $S=0$, l'équation en x, y, z de la surface proposée , rapportée à trois axes rectangulaires , choisis de telle sorte que l'axe des z soit vertical. Si l'on désigne par α, β, γ les trois angles que fait la normale au point (x, y, z) avec les axes des coordonnées ; en posant , pour abréger ,

$$\frac{dS}{dx} = P , \quad \frac{dS}{dy} = Q , \quad \frac{dS}{dz} = R , \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = V ; \quad (2)$$

on aura

$$\text{Cos.}\alpha = PV, \quad \text{Cos.}\beta = QV, \quad \text{Cos.}\gamma = RV; \quad (3)$$

et l'équation différentielle de la surface S sera

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \quad (4)$$

En prenant la somme des produits respectifs des équations (3) par P , Q , R , on trouve

$$P\text{Cos.}\alpha + Q\text{Cos.}\beta + R\text{Cos.}\gamma = (P^2 + Q^2 + R^2)V = \frac{x}{V}. \quad (5)$$

Dans ces diverses formules, le signe de V devra varier suivant que la chaînette sera couchée de côté ou d'autre de la surface S . On le déterminera, pour chaque problème, par la considération d'un cas particulier, comme on détermine les constantes dans le calcul intégral.

Si, considérant un arc quelconque de la chaînette, nous remplaçons les tensions aux extrémités de cet arc, par des forces équivalentes, tangentes à cette courbe en ces points, nous devons former un système en équilibre, dans lequel l'équilibre devra subsister encore, si nous supposons que cette portion, sans changer de courbure, est subitement devenue inflexible.

Cette portion de chaînette exerce, en chacun de ses points, sur la surface S une pression qu'on peut remplacer par une force égale et contraire, normale à cette surface, dont on pourra dès lors faire abstraction dans toute la partie qui répond à cet arc de la chaînette, qui, retenu en équilibre par l'action de toutes ces forces, deviendra ainsi un système libre de forme invariable, dans lequel conséquemment les forces devront avoir une résultante nulle; leurs sommes de composantes, parallèles aux trois axes, devront donc être aussi séparément nulles; ce qui nous conduira à trois équations entre les données et les inconnues du problème. Occupons-nous donc de la recherche de ces équations.

Prenons l'arc de la chaînette depuis son point le plus bas, où sa tangente est horizontale, jusqu'à l'un quelconque (x, y, z) de ses points. Sa tension au point le plus bas pouvant être assimilée à un poids, nous supposerons qu'en la rompant en cet endroit, il soit nécessaire, pour la maintenir en équilibre, de lui ajouter un prolongement vertical d'une longueur a et de même densité qu'elle, passant sur une poulie fixe, infiniment petite. Prenant alors, pour unité de poids, le poids d'une unité de longueur de cette chaînette, nous pourrions dire qu'en son point le plus bas la tension est a . De plus, comme les axes des x et des y sont simplement assujétis à être rectangulaires sur le plan horizontal des xy , et peuvent d'ailleurs avoir sur ce plan des directions quelconques, nous pourrions les y faire tourner de manière que la tangente au point le plus bas de la chaînette, et conséquemment la tension a en ce point, soit parallèle à l'axe des x . Quant à la tension au point (x, y, z) dirigée suivant la tangente en ce point, nous la représenterons par T ; en désignant par s l'arc de la courbe compris depuis le point le plus bas jusqu'à celui-là, les composantes de cette tension, parallèles aux trois axes, seront

$$T \frac{dx}{ds} , \quad T \frac{dy}{ds} , \quad T \frac{dz}{ds} .$$

Soit N la pression normale exercée par la chaînette, au point (x, y, z) , sur la surface S ; cette pression sera une fonction des trois coordonnées de ce point et variera avec elles; mais, dans toute l'étendue d'un élément ds , on peut la regarder comme constante et proportionnelle à l'étendue de cet élément, pour lequel elle sera ainsi exprimée par Nds ; et, comme elle est normale à la surface S , ses composantes, parallèles aux axes, seront respectivement

$$Nds \cdot \text{Cos.}\alpha , \quad Nds \cdot \text{Cos.}\beta , \quad Nds \cdot \text{Cos.}\gamma ;$$

nous devons donc remplacer les sommes de composantes, paral-

lèles aux axes, de la pression de l'arc entier, depuis le point le plus bas, origine des S , par les intégrales

$$-\int NCos.\alpha.ds, \quad -\int NCos.\beta.ds, \quad -\int NCos.\gamma ds :$$

Enfin aux composantes parallèles à l'axe des x , il faudra ajouter le poids de la chaînette, pris négativement, et qui, d'après les conventions qui précèdent sur le choix des unités de poids et de longueur, devra être exprimé par $-s$.

Exprimant donc que les sommes de composantes parallèles aux trois axes sont séparément nulles, et observant que la tension a doit être de signe contraire à la composante de T , parallèle à l'axe des x , nous aurons

$$T \frac{dx}{ds} - \int NCos.\alpha.ds - a = 0,$$

$$T \frac{dy}{ds} - \int NCos.\beta.ds = 0,$$

$$T \frac{dz}{ds} - \int NCos.\gamma.ds - s = 0 :$$

De ces trois équations on tirera les valeurs des deux inconnues T et N et en outre une équation en x, y, z , indépendante de ces mêmes inconnues, laquelle sera l'équation d'une surface coupant la surface S suivant la chaînette demandée. En les différentiant, elles deviennent

$$\left. \begin{aligned} dT \cdot \frac{dx}{ds} + Td \frac{dx}{ds} - NCos.\alpha.ds &= 0, \\ dT \cdot \frac{dy}{ds} + Td \frac{dy}{ds} - NCos.\beta.ds &= 0, \\ dT \cdot \frac{dz}{ds} + Td \frac{dz}{ds} - NCos.\gamma.ds &= ds, \end{aligned} \right\} (6)$$

Comme on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad (7)$$

il s'ensuit qu'en considérant s comme la variable indépendante, on aura

$$dx \cdot d \frac{dx}{ds} + dy \cdot d \frac{dy}{ds} + dz \cdot d \frac{dz}{ds} = 0. \quad (8)$$

En outre, parce que la normale à la surface S , en (x, y, z) , est perpendiculaire à la tangente à la chaînette, en ce même point, on aura

$$\frac{dx}{ds} \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \beta + \frac{dz}{ds} \cos \gamma = 0. \quad (9)$$

Enfin, l'équation (7) donne, en divisant par ds

$$\frac{dx}{ds} dx + \frac{dy}{ds} dy + \frac{dz}{ds} dz = ds. \quad (10)$$

Cela posé, si l'on prend la somme des produits respectifs des équations (6) par dx , dy , dz , en ayant égard aux relations (8), (9), (10), il viendra, en divisant par ds ,

$$dT = dz,$$

d'où

$$T = z + A; \quad (11)$$

A étant une constante arbitraire. Ainsi la tension T au point (x, y, z) est tout à fait indépendante de la longueur de l'arc de la chaînette compris depuis ce point jusqu'au point le plus bas de cette courbe, ainsi que de la surface sur laquelle elle est située; cette tension ne dépend uniquement que de la distance verticale entre ces deux points, c'est-à-dire, de la distance entre les plans horizontaux qui les contiennent respectivement.

Si l'on désigne par c la coordonnée verticale du point le plus bas de la chaînette, il faudra qu'à $z=c$ réponde $T=a$, ce qui donnera

$$a=c+A; \quad (12)$$

d'où l'on voit que, si l'on disposait le plan arbitraire des xy de telle sorte que l'on eût $c=a$, il en résulterait $A=0$, et par suite $T=z$; c'est-à-dire que, si l'on remplace la tension au point le plus bas par un prolongement de la chaînette d'une longueur suffisante, passant sans frottement sur une poulie infiniment petite, et pendant verticalement, on pourra remplacer la tension en un autre point quelconque de cette chaînette par un prolongement de même nature qui devra alors se terminer inférieurement avec le premier sur un même plan horizontal; d'où l'on peut conclure, plus généralement, que, si l'on remplace les tensions aux deux extrémités d'un arc quelconque de la chaînette par des prolongemens de cette chaînette, d'une longueur suffisante, passant sur des poulies infiniment petites et pendant verticalement, ces deux prolongemens devront se terminer inférieurement au même plan horizontal (*); d'où il résulte encore que la différence des tensions en deux points quelconques de la chaînette est constamment égale au poids d'une portion de cette chaînette dont la longueur serait égale à la distance verticale entre ces deux points.

Pour conserver à nos résultats toute leur généralité, nous garderons A ; et, en substituant pour T et dT , dans les équations (6) leurs valeurs $z+A$ et dz , elles deviendront, en divisant par ds

(*) Ceci est, comme l'on voit, une généralisation de ce qui a été établi tom. XIX, pag. 347.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} + (z+A) \frac{d^2x}{ds^2} - N \cos \alpha &= 0, \\ \frac{dz}{ds} \frac{dy}{ds} + (z+A) \frac{d^2y}{ds^2} - N \cos \beta &= 0, \\ \frac{dz}{ds} \frac{dz}{ds} + (z+A) \frac{d^2z}{ds^2} - N \cos \gamma &= 1. \end{aligned} \right\} \cdot (13).$$

Pour tirer facilement de ces équations la valeur de la pression normale N , au point (x, y, z) , nous prendrons la somme de leurs produits respectifs par P, Q, R ; ce qui donnera, en ayant égard aux relations (4) et (5),

$$(z+A) \left(P \frac{d^2x}{ds^2} + Q \frac{d^2y}{ds^2} + R \frac{d^2z}{ds^2} \right) - \frac{N}{V} = R;$$

d'où on tirera

$$N = V \left\{ (z+A) \left(P \frac{d^2x}{ds^2} + Q \frac{d^2y}{ds^2} + R \frac{d^2z}{ds^2} \right) - R \right\},$$

ou encore (2)

$$N = \frac{(z+A) \left(P \frac{d^2x}{ds^2} + Q \frac{d^2y}{ds^2} + R \frac{d^2z}{ds^2} \right) - R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}. \quad (14)$$

En substituant cette valeur, ainsi que la valeur (3) de $\cos \gamma$, dans la dernière des équations (13), nous obtiendrons, pour l'équation différentielle du second ordre d'une surface qui doit couper la surface S suivant la chaînette cherchée,

$$R(z+A) \left(P \frac{d^2x}{ds^2} + Q \frac{d^2y}{ds^2} \right) = (P^2 + Q^2) \left\{ (z+A) \frac{d^2z}{ds^2} - 1 \right\} + (P^2 + Q^2 + R^2) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2. \quad (15)$$

Pour première application de ces formules générales, supposons la chaînette couchée sur un plan incliné, et, pour que la tangente au point le plus bas soit parallèle à l'axe des x , comme ces mêmes formules l'exigent, faisons passer le plan incliné par cet axe, et soit ω l'angle qu'il fait avec le plan des xz , son équation sera

$$y \text{Cos.}\omega = z \text{Sin.}\omega . \quad (16)$$

Nous aurons ici

$$S = y \text{Cos.}\omega - z \text{Sin.}\omega ,$$

d'où

$$P = \frac{dS}{dx} = 0; \quad Q = \frac{dS}{dy} = \text{Cos.}\omega , \quad R = \frac{dS}{dz} = -\text{Sin.}\omega ,$$

$$P^2 + Q^2 = \text{Cos.}^2\omega , \quad P^2 + Q^2 + R^2 = 1 ;$$

en substituant ces valeurs dans les formules (14) et (15), elles deviendront

$$N = (z + A) \left(\frac{d^2y}{ds^2} \text{Cos.}\omega - \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}\omega \right) + \text{Sin.}\omega , \quad (17)$$

$$(z + A) \left\{ \frac{d^2y}{ds^2} \text{Sin.}\omega + \frac{d^2z}{ds^2} \text{Cos.}\omega \right\} \text{Cos.}\omega + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \text{Cos.}^2\omega ; \quad (18)$$

mais l'équation (16) donne, par deux différentiations,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} \frac{\text{Sin.}\omega}{\text{Cos.}\omega} , \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} \frac{\text{Sin.}\omega}{\text{Cos.}\omega} ; \quad (19)$$

substituant ces valeurs dans les équations (17) et (18), elles deviendront

$$N = \text{Sin.}\omega , \quad (20)$$

$$(z+A) \frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \text{Cos.}^2 \omega . \quad (21)$$

L'équation (20) nous apprend que la pression sur le plan incliné est constante en tous les points de la chaînette, et que, pour une unité de longueur de cette courbe, elle est égale à l'unité de poids multipliée par le cosinus de l'inclinaison de ce plan à l'horizon.

L'équation (21) revient à

$$\frac{d \left\{ (z+A) \frac{dz}{ds} \right\}}{ds} = \text{Cos.}^2 \omega ,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(z+A) \frac{dz}{ds} = s \text{Cos.}^2 \omega + B \text{Cos.} \omega ,$$

B étant une constante arbitraire. On tire de là, en multipliant par $2ds$ et intégrant de nouveau

$$(z+A)^2 = s^2 \text{Cos.}^2 \omega + 2Bs \text{Cos.} \omega + C ,$$

C étant une nouvelle constante.

De cette dernière équation on tire

$$s \text{Cos.} \omega = -B \pm \sqrt{(z+A)^2 - (C-B^2)} ;$$

d'où, en différentiant,

$$ds \text{Cos.} \omega = \pm \frac{(z+A) dz}{\sqrt{(z+A)^2 - (C-B^2)}} ;$$

et, en quarrant,

$$ds^2 \text{Cos.}^2 \omega , \text{ c'est-à-dire } (dx^2 + dy^2 + dz^2) \text{Cos.}^2 \omega = \frac{(z+A)^2 dz^2}{(z+A)^2 - (C-B^2)} ;$$

ou encore , en remplaçant (19) $dy^2 \text{Cos.}^2 \omega$ par $dz^2 \text{Sin.}^2 \omega$,

$$dx^2 \text{Cos.}^2 \omega + dz^2 = \frac{(z+A)^2 dz^2}{(z+A)^2 - (C-B^2)} ,$$

ce qui donne

$$dx \text{Cos.} \omega = \sqrt{C-B^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z+A)^2 - (C-B^2)}} ;$$

telle est donc l'équation différentielle de la projection de la chaînette sur le plan des xz .

Si l'on veut que l'axe des x soit tangent au point le plus bas , il faudra qu'à $z=0$ réponde $\frac{dz}{dx}=0$, ce qui donnera $C-B^2=A^2$; au moyen de quoi l'équation deviendra

$$dx \text{Cos.} \omega = \frac{A dz}{\sqrt{(z+A)^2 - A^2}} ;$$

mais alors (12) on aura $c=0$ d'où $A=a$, ce qui donne,

$$dx \text{Cos.} \omega = \frac{a dz}{\sqrt{(z+a)^2 - a^2}} ;$$

ce qui donnera , et en intégrant de nouveau ,

$$e \frac{x \text{Cos.} \omega}{a} = \frac{z+a + \sqrt{(z+a)^2 - a^2}}{D} ,$$

D étant une nouvelle constante. Si l'on veut en outre que le point le plus bas soit l'origine même des coordonnées , il faudra que x et z soient nuls en même temps , ce qui donnera $D=a$, et , par suite ,

$$a.e \frac{x \text{Cos.} \omega}{a} = z+a + \sqrt{(z+a)^2 - a^2} ;$$

équation qui, résolue par rapport à $z+a$, donne finalement

$$2(z+a) = a \left\{ e^{\frac{x \cos \omega}{a}} + e^{-\frac{x \cos \omega}{a}} \right\}; \quad (22)$$

telle est donc l'équation primitive de la chaînette sur le plan vertical des xz . Si l'on suppose $\omega = 0$, d'où $\cos \omega = 1$, elle devient

$$2(z+a) = a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

c'est-à-dire, celle de la chaînette ordinaire, comme cela doit être (*).

Pour deuxième application, supposons que la chaînette soit située sur une surface cylindrique quelconque, ayant ses éléments rectilignes verticaux, et conséquemment parallèles à l'axe des z ; alors la coordonnée z n'entrera pas dans S , de sorte qu'on aura

$$R = \frac{dS}{dz} = 0,$$

(*) En considérant que la pesanteur le long d'un plan incliné n'est autre que la pesanteur dans un plan vertical multipliée par le sinus de l'inclinaison du plan, on pourrait parvenir directement à l'équation différentielle de la chaînette sur un plan incliné quelconque; on en conclurait ensuite l'équation différentielle de la chaînette sur une surface courbe quelconque, en considérant qu'en chacun de ses points, cette chaînette se trouve située sur le plan tangent à la surface courbe en ce point. On pourrait aussi obtenir l'équation de la chaînette située sur une surface courbe, en se proposant de tracer, sur cette surface, une courbe telle que la distance de son centre de gravité au plan des xy fût la moindre possible; ce qui offrirait une application intéressante de la méthode des variations.

les équations (14) et (15) deviendront ainsi, en divisant la dernière par $P^2 + Q^2$,

$$N = \frac{(z+A) \left(P \frac{d^2x}{ds^2} + Q \frac{d^2y}{ds^2} \right)}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad (23)$$

$$(z+A) \frac{d^2z}{ds^2} + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \quad (24)$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation (21) dans laquelle on aurait fait $\cos \omega = 1$ et changé x en s . Si donc, comme nous l'avons fait alors, on place le point le plus bas à l'origine des coordonnées, elle donnera (22)

$$2(z+a) = a \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right). \quad (25)$$

Mais, si l'on développe la surface cylindrique sur un plan vertical, z et s seront les coordonnées rectangulaires de la chaînette; donc le développement d'une chaînette, située sur une surface cylindrique à éléments rectilignes verticaux, est une chaînette ordinaire, comme il était facile de le prévoir.

Quant à la pression normale (23) exercée par la chaînette, en chaque point, sur la surface cylindrique, on sent qu'elle devra différer suivant la nature de cette surface. Pour donner un exemple de la manière de la calculer dans chaque cas, supposons qu'il soit question d'un cylindre de révolution d'un rayon égal à r , ayant pour axe l'axe des z ; nous aurons

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (26)$$

d'où

$$S = x^2 + y^2 - r^2,$$

$$P = \frac{dS}{dx} = 2x, \quad Q = \frac{dS}{dy} = 2y, \quad P^2 + Q^2 = 4(x^2 + y^2) = 4r^2;$$

ce qui donnera, en substituant dans (23), et observant qu'ici $A = a$

$$rN = (z + a) \left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right); \quad (27)$$

mais, par deux différentiations successives, l'équation (26) donne

$$x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} = - \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - 1;$$

on aura donc, en substituant dans (27),

$$rN = (z + a) \left\{ \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - 1 \right\};$$

d'un autre côté, l'équation (25) donne

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}} \right),$$

d'où

$$\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2s}{a}} + e^{-\frac{2s}{a}} - 2 \right),$$

et

$$\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2s}{a}} + e^{-\frac{2s}{a}} + 2 \right) = \left(\frac{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}{2} \right)^2 = \left(\frac{z + a}{a} \right)^2;$$

il viendra donc, en substituant,

$$N = \frac{(z+a)^3}{a^2 r} ;$$

c'est-à-dire que si, au-dessous du plan des xy , on en conduit un autre aussi horizontal, qui en soit distant d'une quantité égale à la longueur de l'arc de chaînette dont le poids ferait équilibre à la tension au point le plus bas, les pressions croîtront comme les cubes des hauteurs des différens points de la courbe, au-dessus de ce plan. Elles seront d'ailleurs d'autant plus grandes, toutes choses égales d'ailleurs, que le rayon du cylindre sera plus petit.

Pour troisième application, supposons que la chaînette soit posée sur une surface conique de révolution, ayant pour axe l'axe des z , pour sommet l'origine et son angle générateur égal à ω ; c'est la question proposée à la pag. 87 du XVIII.^{me} volume des *Annales*. L'équation du cône sera ainsi

$$(x^2 + y^2) \text{Cos.}^2 \omega = z^2 \text{Sin.}^2 \omega \quad (28)$$

de sorte qu'on aura

$$S = (x^2 + y^2) \text{Cos.}^2 \omega - z^2 \text{Sin.}^2 \omega ,$$

d'où

$$P = \frac{dS}{dx} = 2x \text{Cos.}^2 \omega , \quad Q = \frac{dS}{dy} = 2y \text{Cos.}^2 \omega , \quad R = \frac{dS}{dz} = -2z \text{Sin.}^2 \omega ;$$

$$P^2 + Q^2 = 4(x^2 + y^2) \text{Cos.}^4 \omega , \quad P^2 + Q^2 + R^2 = 4\{(x^2 + y^2) \text{Cos.}^4 \omega + z^2 \text{Sin.}^4 \omega\} ,$$

substituant ces valeurs dans les formules (14) et (15), elles deviendront

$$N = \frac{(z+a) \left\{ \left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2 \omega - z \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}^2 \omega \right\} + z \text{Sin.}^2 \omega}{\sqrt{(x^2 + y^2) \text{Cos.}^4 \omega + z^2 \text{Sin.}^4 \omega}} ;$$

$$z(z+A) \left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Sin.}^2\omega \text{Cos.}^2\omega$$

$$+ (x^2+y^2) \left\{ (z+A) \frac{d^2z}{ds^2} - 1 \right\} \text{Cos.}^4\omega + \left\{ (x^2+y^2) \text{Cos.}^4\omega + z^2 \text{Sin.}^4\omega \right\} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 0.$$

En mettant d'abord, dans ces deux équations, pour $(x^2+y^2)\text{Cos.}^2\omega$ sa valeur $z^2\text{Sin.}^2\omega$, elles deviendront

$$Nz \text{Sin.}\omega = (z+A) \left\{ \left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2\omega - z \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}^2\omega \right\} + \text{Sin.}^2\omega, \quad (29)$$

$$(z+A) \left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} + z \frac{d^2z}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2\omega + z \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = z \text{Cos.}^2\omega; \quad (30)$$

mais, par deux différentiations, on tire de l'équation (28)

$$\left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) \text{Cos.}^2\omega = z \frac{dz}{ds} \text{Sin.}^2\omega$$

$$\left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2\omega = z \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}^2\omega - \left\{ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right\} \text{Cos.}^2\omega + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \text{Sin.}^2\omega,$$

ou bien encore

$$\left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2\omega = z \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}^2\omega - \left\{ 1 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right\} \text{Cos.}^2\omega + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \text{Sin.}^2\omega,$$

ou bien enfin

$$\left(x \frac{d^2x}{ds^2} + y \frac{d^2y}{ds^2} \right) \text{Cos.}^2\omega = z \frac{d^2z}{ds^2} \text{Sin.}^2\omega + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - \text{Cos.}^2\omega;$$

ce qui donnera, en substituant dans les équations (29) et (30).

$$Nz \text{Sin.}\omega = (z+A) \left\{ \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - \text{Cos.}^2\omega \right\} + z \text{Sin.}^2\omega, \quad (31)$$

$$z(z+A) \frac{d^2z}{ds^2} + (2z+A) \left\{ \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - \text{Cos.}^2\omega \right\} = 0. \quad (32)$$

On peut mettre la dernière sous cette forme

$$(2z+A) \sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} - z(z+A) \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2}} = 0;$$

ou, en multipliant par dz ,

$$\sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} . d.z(z+A) + z(z+A) . d. \sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = 0;$$

ou bien encore

$$d \left\{ z(z+A) \sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} \right\} = 0;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$z(z+A) \sqrt{\text{Cos.}^2\omega - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = E;$$

E étant une constante arbitraire. En désignant toujours par c la coordonnée verticale du point le plus bas de la chaînette, il faudra qu'à $z=c$ reponde $\frac{dz}{ds} = 0$, ce qui donnera

$$c(c+A)\text{Cos.}\omega = E,$$

ou bien (12)

$$E = ac\text{Cos.}\omega;$$

de sorte que l'intégrale deviendra

$$z(z+A) \sqrt{\text{Cos.}^2 \omega - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = ac \text{Cos.} \omega . \quad (33)$$

On en tirera

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - \text{Cos.}^2 \omega = - \frac{a^2 c^2 \text{Cos.}^2 \omega}{z^2(z+A)^2} , \quad (34)$$

valeur qui , substituée dans la formule (31) , donnera

$$N = \frac{z^3(z+A) \text{Sin.}^2 \omega - a^2 c^2 \text{Cos.}^2 \omega}{z^3(z+A) \text{Sin.} \omega} , \quad (35)$$

formule sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

Le second membre de l'équation (33) étant constant , et son premier membre étant le produit de trois facteurs dont les deux premiers croissent avec z , il s'ensuit que ce troisième facteur doit devenir de plus en plus petit , à mesure que z devient plus grand , et qu'il doit être tout à fait nul lorsque z est infini , on doit donc avoir alors

$$\frac{dz}{ds} = \pm \text{Cos.} \omega ,$$

ce qui ne peut évidemment avoir lieu qu'autant que la chaînette se confondra avec une génératrice du cône. Ainsi la chaînette conique a pour asymptotes deux génératrices de la surface sur laquelle elle se trouve située.

Dans le cas de z infini , la formule (35) donne simplement $N = \text{Sin.} \omega$, et il doit bien en effet en être ainsi , puisque les branches infinies de la chaînette sont dans le même cas qu'une chaînette rectiligne couchée sur un plan incliné suivant la direction de sa plus grande pente.

Dans le cas où l'on aura $A=0$ ou (12) $c=a$, la formule (35) deviendra

$$N = \frac{z^4 \text{Sin.}^2 \omega - a^4 \text{Cos.}^2 \omega}{z^4 \text{Sin.} \omega} ;$$

la pression sera donc nulle dès qu'on aura

$$z^2 \text{Sin.} \omega = a^2 \text{Cos.} \omega , \quad \text{d'où} \quad z = \frac{a}{\sqrt{\text{Tang.} \omega}} .$$

Cette valeur de z sera plus grande que a , c'est-à-dire plus grande que la distance du point le plus bas de la chaînette au sommet du cône, toutes les fois que l'angle générateur ω sera moindre qu'un demi-angle droit, alors donc la partie inférieure de la chaînette abandonnera le cône pour se disposer en chaînette ordinaire. Les tensions extrêmes de cette nouvelle chaînette seront (11)

$$T = \frac{a}{\sqrt{\text{Tang.} \omega}} ;$$

L'équation (34) donne

$$\left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dz^2} + 1 = \frac{z^2(z+A)^2}{\{z^2(z+A)^2 - a^2c^2\} \text{Cos.}^2 \omega} ,$$

et conséquemment

$$dx^2 + dy^2 = \frac{z^2(z+A)^2 \text{Sin.}^2 \omega + a^2c^2 \text{Cos.}^2 \omega}{\{z^2(z+A)^2 - a^2c^2\} \text{Cos.}^2 \omega} dz^2 ,$$

ou bien encore

$$z^2(z+A)^2 \{(dx^2 + dy^2) \text{Cos.}^2 \omega - dz^2 \text{Sin.}^2 \omega\} = a^2c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \text{Cos.}^2 \omega ;$$

mais on tire de l'équation (28)

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\text{Cos.} \omega}{\text{Sin.} \omega} , \quad dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2} z} \cdot \frac{\text{Cos.} \omega}{\text{Sin.} \omega} ,$$

$$z + A = \frac{A \sin. \omega + \sqrt{x^2 + y^2} \cos. \omega}{\sin. \omega} ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$(x^2 + y^2) \{ A \sin. \omega + \sqrt{x^2 + y^2} \cos. \omega \}^2 \{ (x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (xdx + ydy)^2 \} \cos.^2 \omega \\ = a^2 c^2 \{ (x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) \sin.^2 \omega + (xdx + ydy)^2 \cos.^2 \omega \} \sin.^2 \omega ;$$

et telle est l'équation différentielle de la projection de la chaînette sur le plan des xy .

Si, pour passer aux coordonnées polaires, nous posons

$$x = r \sin. \theta , \quad y = r \cos. \theta ,$$

il en résultera

$$dx = dr \sin. \theta + r d\theta \cos. \theta , \quad dy = dr \cos. \theta - r d\theta \sin. \theta ; \\ x^2 + y^2 = r^2 , \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 , \quad xdx + ydy = r dr ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$r^4 (A \sin. \omega + r \cos. \omega)^2 d\theta^2 \cos.^2 \omega = a^2 c^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 \sin.^2 \omega) \sin.^2 \omega ;$$

équation d'où on tirera

$$d\theta = \frac{ac dr \sin. \omega}{r \sqrt{(A \sin. \omega + r \cos. \omega)^2 r^2 \cos.^2 \omega - a^2 c^2 \sin.^4 \omega}} .$$

Il ne paraît pas que cette valeur soit généralement intégrable sous forme finie.

En conséquence nous nous bornerons à considérer le cas où $A=0$ et $c=a$; il vient alors

$$d\theta = \frac{a^2 dr \sin. \omega}{r \sqrt{r^4 \cos.^4 \omega - a^4 \sin.^4 \omega}} ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$2(\theta + F)\text{Sin.}\omega = \text{Arc}\left(\text{Cos.} = \frac{a^2 \text{Sin.}^2 \omega}{r^2 \text{Cos.}^2 \omega}\right),$$

F étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, on remarquera que, pour la projection du point le plus bas sur le plan des xy , θ est nul, et qu'on doit avoir alors

$$r = a \frac{\text{Sin.}\omega}{\text{Cos.}\omega},$$

cela donne $F=0$, de sorte qu'on a simplement, pour l'équation polaire demandée,

$$2\theta \text{Sin.}\omega = \text{Arc}\left(\text{Cos.} = \frac{a^2 \text{Sin.}^2 \omega}{r^2 \text{Cos.}^2 \omega}\right), \quad (36)$$

ce qui donne, pour r infini,

$$\theta = \pm \frac{\omega}{4 \text{Sin.}\omega};$$

c'est donc là la moitié de l'angle que font entre elles les projections des asymptotes de la chaînette, dans ce cas.

Il nous sera facile, dans ce même cas, de connaître la nature de la courbe décrite par la chaînette sur le développement du cône. Soit R le rayon vecteur de cette courbe, duquel r est la projection, et soit Θ l'angle du développement du cône qui répond à l'angle θ , nous aurons

$$r = \frac{R}{\text{Sin.}\omega}, \quad \theta = \frac{\Theta}{\text{Sin.}\omega};$$

substituant donc dans l'équation (35), elle deviendra

$$2\Theta = \text{Arc}\left(\text{Cos.} = \frac{a^2 \text{Sin.}^4 \omega}{R^2 \text{Cos.}^2 \omega}\right),$$

ou bien

$$a^2 \text{Sin.}^4 \omega = R^2 \text{Cos.}^2 \omega \text{Cos} 2\Theta = R^2 (\text{Cos.}^2 \Theta - \text{Sin.}^2 \Theta) \text{Cos.}^2 \omega .$$

Si, pour avoir des coordonnées rectangulaires, on pose

$$R \text{Sin.} \Theta = X , \quad R \text{Cos.} \Theta = Y ,$$

il viendra, en substituant ,

$$(Y^2 - X^2) \text{Cos.}^2 \omega = a^2 \text{Sin.}^4 \omega ;$$

équation d'une hyperbole équilatère quel que soit d'ailleurs l'angle générateur du cône.

Pour dernière application, supposons que la chaînette soit posée sur une sphère donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 , \quad (37)$$

ce qui donne, par deux différentiations,

$$x dx + y dy + z dz = 0 , \quad (38)$$

$$x \frac{d^2 x}{ds^2} + y \frac{d^2 y}{ds^2} + z \frac{d^2 z}{ds^2} + 1 = 0 , \quad (39)$$

et, par suite,

$$P = x , \quad Q = y , \quad R = z , \quad P^2 + Q^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2 , \\ P^2 + Q^2 + R^2 = r^2 ;$$

à l'aide de ces divers résultats, les formules (14) et (15) deviennent

$$N = - \frac{2z + A}{r} , \quad (40)$$

$$r^2 (z + A) \frac{d^2 z}{ds^2} + r^2 \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + z(2z + A) = r^2 . \quad (41)$$

174 DE LA CHÂINETTE SUR UNE SURFACE COURBE.

La formule (39) prouve que, toutes choses égales d'ailleurs, la pression est en raison inverse du rayon de la sphère. Dans le cas particulier de $A=0$ ou $c=a$, on a $N=-\frac{2z}{r}$, de sorte que la pression est proportionnelle à l'élévation de chaque point de la chaînette au-dessus du plan du grand cercle horizontal; elle est à son maximum au pôle de ce cercle, où elle est égale à 2, c'est-à-dire au double du poids d'une unité de longueur de la chaînette.

Dans le même cas particulier, l'équation (41) devient simplement

$$z \frac{d^2z}{ds^2} + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \frac{r^2 - 2z^2}{r^2},$$

ou bien

$$r^2 d \left\{ \frac{d(r^2 - 2z^2)}{ds} \right\}^2 + 4d.(r^2 - 2z^2)^2 = 0;$$

ce qui donne, par une première intégration,

$$r^2 \left\{ \frac{d(r^2 - 2z^2)}{ds} \right\}^2 + 4(r^2 - 2z^2)^2 = G.$$

On déterminera la constante G ; en observant qu'à $\frac{dz}{ds}$ ou $\frac{d(r^2 - 2z^2)}{ds} = 0$ doit répondre $z=c$; ce qui donne

$$4(r^2 - 2c^2)^2 = G,$$

et, par suite,

$$r^2 \left\{ \frac{d(r^2 - 2z^2)}{ds} \right\}^2 = 4\{(r^2 - 2c^2)^2 - (r^2 - 2z^2)^2\};$$

puis, en extrayant les racines,

$$\frac{2ds}{r} = \frac{-d(r^2 - 2z^2)}{\sqrt{(r^2 - 2c^2)^2 - (r^2 - 2z^2)^2}};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{2s}{r} = \text{Arc} \left(\text{Cos.} = \frac{r^2 - 2z^2}{r^2 - 2c^2} \right);$$

il n'y a point ici de constante à ajouter, puisque $s=0$ quand $z=c$, comme cela doit être.

Au point pour lequel $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$, on a $\frac{2s}{r} = \frac{1}{2}\omega$, d'où $s = \frac{\pi r}{4}$; telle est donc, dans le cas particulier qui nous occupe, la longueur de la portion de chaînette comprise depuis le point dont il s'agit, jusqu'au point le plus bas; d'où il suit que l'arc total de la courbe, compris entre deux points situés de cette sorte, est précisément égal au quart de la circonférence d'un grand cercle.
