ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC
THOMAS DE ST-LAURENT

Questions résolues. Solution du problème de géométrie énoncé à la page 380 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 83-86
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__83_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 380 du précédent volume ;

Par MM. LENTHÉRIC, professeur au Collége royal de Montpellier ; THOMAS DE ST-LAURENT, capitaine d'Etat-Major; ROCHE, professeur à l'Ecole d'artillerie de la Marine, A. V., professeur de Rhétorique, et W. H. T.

PROBLÈME. *Diviser géométriquement le quart de la circonférence en trois arcs dont les cosinus soient entre eux dans le rapport de trois longueurs données ?*

Solution. Soient r le rayon du cercle, x, y, z les trois arcs demandés, a, b, c les trois longueurs données ; les équations du problème seront

$$x+y+z=\tfrac{1}{2}\varpi r\ , \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{Cos}.x}{a}=\frac{\mathrm{Cos}.y}{b}=\frac{\mathrm{Cos}.z}{c}\ . \qquad (2)$$

Si l'on pose chaque membre de la double équation (2) égal à λ, la question se trouvera réduite à déterminer λ et l'on aura

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos.}x&=\lambda a\ ,\\ \text{Cos.}y&=\lambda b\ ,\\ \text{Cos.}z&=\lambda c\ ;\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

l'équation (1) donne d'ailleurs facilement

$$r^2(\text{Cos.}^4x+\text{Cos.}^4y+\text{Cos.}^4z)-2r^2(\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y+\text{Cos.}^2x\text{Cos.}z^2$$
$$+\text{Cos.}^2y\text{Cos.}^2z)+4\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y\text{Cos.}^2z=0\ ;$$

d'où, en vertu des valeurs (3) et en divisant par λ^4,

$$\lambda=r.\ \frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{2abc}\ ,$$

ou encore

$$\lambda=\frac{r\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2abc}\ ;$$

ce qui montre d'abord que le problème n'est possible qu'autant qu'aucune des trois droites données a, b, c n'est plus grande que la somme des autres ; c'est-à-dire, qu'autant qu'on peut former un triangle avec ces trois droites. Si l'on désigne par T l'aire de ce triangle et par R le rayon du cercle circonscrit, on aura, comme l'on sait,

$$4T=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ ,\qquad 4TR=abc\ ;$$

donc

$$\lambda=\frac{r}{2R}\ ;$$

donc (3)

$$\text{Cos.}x=\frac{ar}{2R}\;,\quad \text{Cos.}y=\frac{br}{2R}\;,\quad \text{Cos}\,z=\frac{cr}{2R}\;,\quad (4)$$

expressions facile à construire.

Telle est la manière la plus naturelle de résoudre le problème, et telles sont aussi les formules qui ont été données en premier lieu par M. de St-Laurent ; mais il remarque ensuite qu'en désignant par α, β, γ les angles du triangle respectivement opposés à a, b, c, on doit avoir

$$\frac{\text{Sin.}\alpha}{a}=\frac{\text{Sin.}\beta}{b}=\frac{\text{Sin.}\gamma}{c}\;,$$

et par suite (2)

$$\frac{\text{Cos.}x}{\text{Sin.}\alpha}=\frac{\text{Cos.}y}{\text{Sin.}\beta}=\frac{\text{Cos.}z}{\text{Sin.}\gamma}\;;$$

équation à laquelle on satisfait en prenant pour x, y, z les complémens respectifs de α, β, γ, puisqu'alors la somme des trois premiers arcs vaut un quart de circonférence et la somme des trois derniers une demi-circonférence, comme cela doit être.

Les trois arcs cherchés sont donc les arcs décrits du rayon donné entre les côtés des complémens des angles du triangle formé par les trois droites données, et des sommets de ces complémens comme centres. Cette construction peut d'ailleurs se justifier *à priori*, et c'est aussi de cette manière qu'elle a été présentée par M. Roche.

Comme les arcs semblables de différens cercles ont leurs cosinus proportionnels, si l'on parvient à construire, pour un rayon quelconque, trois arcs dont les cosinus soient dans le rapport des trois longueurs données et dont la somme soit un quart de circonférence, il sera facile ensuite de construire de tels arcs pour le rayon donné.

Or, si l'on veut que les cosinus des trois arcs soient les longueurs

a, b, c elles-mêmes, les formules (4) prouvent qu'il faudra pour cela prendre $r=2R$. Ainsi, si l'on décrit un cercle dont le rayon soit le diamètre du cercle circonscrit au triangle T, les arcs de ce cercle dont les cosinus seront a, b, c vaudront ensemble le quart de sa circonférence ; et c'est à justifier cette assertion que revient la solution de M. A. V.

M. W. H. T. remarque que, si des sommets du triangle T on abaisse des perpendiculaires sur les côtés qui leur sont respectivement opposés, ces perpendiculaires diviseront les angles de ce triangle en six segmens égaux deux à deux et complémens de ces mêmes angles. La somme de trois de ces segmens, choisis de manière à être tous inégaux, vaudra donc un angle droit et les cosinus de ces mêmes angles, respectivement égaux aux sinus des angles du triangle T, seront conséquemment proportionnels aux côtés opposés de ce triangle, c'est-à-dire, aux longueurs données a, b, c.

Donc, si des sommets du triangle T comme centres, et avec le rayon r on décrit des arcs entre leurs côtés, en prenant trois segmens d'arcs, de manière que ces segmens soient inégaux, ils rempliront les conditions du problème; ce qui rentre, à peu près, dans la construction de M. de St-Laurent.

M. Roche observe qu'on résoudrait avec la même facilité le problème où il s'agirait de *diviser, soit une demi-circonférence, soit une circonférence entière, en trois parties dont les sinus fussent entre eux dans un rapport donné.* On voit, en effet, que les arcs décrits du rayon donné entre les côtés des angles du triangle T, et de leurs sommets comme centres, résolvent le premier problème, tandis que les arcs décrits du même rayon et des mêmes centres entre les côtés des angles extérieurs du triangle résolvent évidemment le second (*).

(*) M. Roche désire que nous informions nos lecteurs qu'il désavoue formellement l'article publié sous son nom à la page 19 du présent volume;