
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. STEINER

Questions proposées. Théorèmes de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 378-380

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__378_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie ;

Proposés à démontrer par M. J. STEINER , géomètre , de Berlin.

~~~~~

I. **S**OIENT deux cercles  $C, c$ , non concentriques, donnés sur un même plan, et que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieurs l'un à l'autre.

Soient tracés une suite de cercles  $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$  le premier assujetti seulement à être inscrit dans l'espace que laissent entre eux les deux cercles  $C, c$  et chacun des autres assujetti non seulement à être inscrit dans cet espace, mais encore à toucher celui qui le précède immédiatement dans la série.

En poursuivant la construction de cette série de cercles, ou bien elle se prolongera indéfiniment, en donnant sans cesse des cercles différens de ceux qui auront déjà été tracés, ou bien au contraire, après avoir fait  $n$  fois le tour de l'espace compris entre les deux cercles donnés,  $C, c$ , on parviendra à un dernier cercle  $O_m$  qui se trouvera tangent au premier  $O_1$ , de sorte que la série se terminera à ce dernier cercle.

On propose d'abord de démontrer que cette circonstance est indépendante de la situation du premier cercle  $O_1$  de la série, et qu'elle ne dépend uniquement que des grandeurs et situations respectives des deux cercles donnés  $C, c$ ; c'est-à-dire, que, suivant les grandeurs et situations de ces deux cercles, la série sera finie ou illimitée, quel que soit le cercle  $O_1$ .

On propose en outre de démontrer que, quand la série est li-

mitée, en représentant respectivement par  $R, r$  les rayons des deux cercles  $C, c$ , et par  $d$  la distance entre leurs centres, on doit avoir cette équation remarquable

$$(R-r)^2 - 4rR \cdot \text{Tang}^2 \frac{n}{m} \varpi = d^2.$$

Si les deux cercles donnés sont l'un hors de l'autre, l'équation sera

$$(R+r)^2 + 4rR \cdot \text{Tang}^2 \frac{n}{m} \varpi = d^2. \quad (*)$$

(\*) Voici un théorème beaucoup plus simple qui doit également être vrai.

Soient deux cercles  $C, c$ , non concentriques, tracés dans un même plan et que, pour fixer les idées, nous supposons intérieurs l'un à l'autre.

Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  une suite de cordes de  $C$  tangentes à  $c$ , la première étant arbitraire et chacune des suivantes étant assujetties à avoir une extrémité commune avec celle qui la précède immédiatement.

Ou bien le nombre de ces cordes sera illimité, ou bien, après avoir fait  $n$  fois le tour de l'espace compris entre les deux cercles  $C, c$ , on parviendra à une dernière corde  $A_m$  qui se terminera au point de départ de la première  $A_1$ ; de sorte que les  $m$  cordes formeront un polygone étoilé, inscrit à  $C$  et circonscrit à  $c$ .

Il s'agirait d'abord de prouver que ces circonstances ne dépendent aucunement de la situation de la première corde  $A_1$ , mais uniquement des rayons  $R, r$  des deux cercles et de la distance  $d$  entre leurs centres.

Il s'agirait en outre d'assigner, dans le dernier cas, le rapport qui doit exister entre les grandeurs  $m, n, R, r, d$ .

Il a déjà été établi (*Annales*, tom. I, pag. 149, tom. III, pag. 346 et tom. XIV, pag. 54) que, dans le cas de  $m=3$  et  $n=1$ , cette relation est

$$R^2 \mp 2rR = d^2.$$

On peut aussi se proposer le même théorème pour deux cercles tracés sur la surface d'une sphère, et il a été démontré (*Annales*, tom. XIV, pag. 59) que, dans le cas de  $m=3$  et  $n=1$ , on doit avoir

$$\{\sin.(R+r) + \sin.(R-r)\} \{3\sin.(R \mp r) - \sin.(R \pm r)\} = 4\sin.^2 d.$$

J. D. G.

Les mêmes choses ont lieu pour des cercles tracés sur la surface d'une sphère ; l'équation est alors

$$\text{Cos.}(R \pm r) \pm 2 \text{Sin.} r \text{Sin.} R \text{Tang.}^2 \frac{n}{m} \varpi = \text{Cos } d .$$

II. Soient deux sphères  $S, s$ , non concentriques, que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieures l'une à l'autre ; et soit inscrite arbitrairement une troisième sphère  $\Sigma$  dans l'intervalle qui les sépare.

Soit ensuite décrite une suite de sphères  $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$  dont la première  $O_1$  soit simplement assujettie à toucher à la fois les trois sphères  $S, s, \Sigma$  ; tandis que chacune des autres sera assujettie non seulement à toucher ces trois mêmes sphères, mais encore à toucher celle qui la précède immédiatement dans la série.

Ou bien la série de ces sphères se prolongera indéfiniment, ou bien, après  $n$  révolutions autour de la sphère  $s$ , on rencontrera une dernière sphère  $O_m$ , touchant la première  $O_1$ , et il s'agirait d'abord de prouver que ces circonstances ne dépendent aucunement ni de la situation arbitraire de la sphère  $\Sigma$ , ni de la situation également arbitraire de la première sphère  $O_1$  de la série ; mais uniquement des rayons  $R, r$  des deux sphères données  $S$  et  $s$ , et de la distance  $d$  entre leurs centres.

Il s'agirait de prouver, en outre, qu'on aura, dans le dernier cas,

$$(R \pm r)^2 \mp 16r \text{Sin.}^2 \frac{n}{m} \varpi = d^2 ;$$

les signes inférieurs répondant au cas où les sphères données  $S, s$  sont extérieures l'une à l'autre.