ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Philosophie mathématique. Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 320-339
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__320_1>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

La méthode de recherche que nous allons faire connaître est susceptible d'applications nombreuses et variées que nous nous proposons de publier successivement. Nous choisirons, pour le présent, celles de ces applications qui, par leur simplicité, nous semblent les plus propres à en bien faire saisir l'esprit.

§. I.

Soient A, B, C trois fonctions linéaires indépendantes quelconques, en x et y; l'équation

$$ABC=0 \qquad (1)$$

sera celle d'un triangle dont les côtés, les angles et les sommets respectivement opposés à ces côtés auront pour équations

$$A=0\,,\qquad B=0\,,\qquad C=0\,, \qquad (2)$$

$$BC=0\,,\qquad CA=0\,,\qquad AB=0\,, \qquad (3)$$

$$\left\{\begin{array}{l}B=0\,,\\ C=0\,,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}C=0\,,\\ A=0\,,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}A=0\,;\\ B=0\,.\end{array}\right. \qquad (4)$$

Soient a, b, c trois constantes indéterminées, entre toutes ou partie desquelles on peut d'ailleurs supposer une relation non homogène quelconque; l'équation du second degré

$$aBC+bCA+cAB=0 \qquad (5)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites à ce triangle.

Si l'on combine tour à tour l'équation (4) avec les trois suivantes

$$bC+cB=0\,,\qquad cA+aC=0\,,\qquad aB+bA=0\,, \qquad (6)$$

qui sont évidemment celles de trois droites passant respectivement par les sommets (B, C), (C, A), (A, B) du triangle, elles la réduiront respectivement aux équations (3) qui sont celles des angles de ce triangle ; d'où il suit que les droites (6) rencontrent la courbe (5) aux mêmes points où elles coupent respectivement les angles du triangle (1) ; or, elles ne coupent ces angles qu'en un seul point, puisqu'elles passent respectivement par leurs sommets ; donc chacune de ces droites (6) n'a qu'un point commun avec la courbe (5) ; donc enfin ces droites (6) sont des tangentes menées à la courbe (5) par les sommets du triangle (1), et dont l'ensemble forme conséquemment un triangle circonscrit ayant pour équation

$$(bC+cB)(cA+aC)(aB+bA)=0 . \qquad (7)$$

Les intersections des côtés de ce dernier triangle avec leurs opposés respectifs dans le premier seront données par les trois couples d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} bC+cB=0 , & A=0 ; \\ cA+bA=0 , & B=0 ; \\ aB+bA=0 , & C=0 . \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Toute droite qui passera par le premier de ces points aura une équation de la forme

$$m(bC+cB)+nA=0 , \qquad \text{ou} \qquad nA+mcB+mbC=0 :$$

or, en posant $m=a$ et $n=bc$, cette équation devient

$$bcA+caB+abC=0 ; \qquad (9)$$

qui est symétrique en A, B, C, a, b, c; donc la droite qu'elle exprime passe aussi par les deux autres points qui se trouvent ainsi en ligne droite avec celui-là.

Les équations (6), prises deux à deux, appartiennent aux sommets du triangle (7) ; d'où il suit qu'en éliminant entre ces équations, prises ainsi deux à deux, la lettre qui leur est commune, les équations résultantes appartiendront à de nouvelles droites passant par ces sommets ; or, ces équations sont

$$cB-bC=0\ , \qquad aC-cA=0\ , \qquad bA-aB=0\ ; \qquad (10)$$

dont chacune est comportée par les deux autres, et qui appartiennent conséquemment à trois droites concourant en un même point ; mais ces droites passent aussi par les sommets du triangle (1) respectivement opposés à ceux du triangle (7) ; on a donc ce double théorème :

THÉORÈME. Deux triangles étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit ;

Les points de concours des côtés de l'inscrit avec leurs opposés respectifs dans le circonscrit appartiennent tous trois à une même droite.	*Les droites qui joignent les sommets du circonscrit avec leurs opposés respectifs dans l'inscrit concourent toutes trois en un même point.*

Il est presque superflu d'observer que ce point et cette droite sont pôle et polaire l'un de l'autre, par rapport à la courbe dont il s'agit, considérée comme directrice.

En modifiant un peu la forme des résultats que nous venons d'obtenir, on peut en présenter le résumé de la manière suivante qui les rend très-faciles à retenir :

Un triangle étant donné par l'équation

$$ABC=0\ ,$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions linéaires quelconques en x et y, l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites est

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=0\ ,$$

dans laquelle a, b, c sont dés constantes indéterminées ; le triangle circonscrit à cette courbe, ayant ses points de contact aux sommets de l'inscrit, a pour équation

$$\left(\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)\left(\frac{C}{c}+\frac{A}{a}\right)\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}\right)=0\ ;$$

les points de concours des côtés de l'inscrit avec leurs opposés respectifs dans le circonscrit appartiennent tous trois à une même droite, donnée par l'équation

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=0\ ;$$

enfin, les droites qui joignent les sommets du circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit concourent toutes trois en un même point donné par la double équation

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\ .$$

Soient posés

$$bC+cB=A'\ ,\quad cA+aC=B'\ ,\quad aB+bA=C'\ ;$$

on en tirera

$$A=\frac{bB'+cC'-aA'}{2bc}\ ;\quad B=\frac{cC'+aA'-bB'}{2ca}\ ,\quad C=\frac{aA'+bB'-cC'}{2ab}\ ;$$

substituant ces valeurs dans les équations (1, 5, 7, 9, 10), et supprimant ensuite les accens devenus pour lors inutiles, on parviendra aux conclusions suivantes.

Un triangle étant donné par l'équation

$$ABC=0\ ,$$

l'équation commune à toutes les lignes du second ordre inscrites est

$$a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-2bcBC-2caCA-2abAB=0\ ;$$

le triangle inscrit ayant ses sommets aux points de contact du circonscrit a pour équation

$$(bB+cC-aA)(cC+aA-bB)(aA+bB-cC)=0\ ;$$

la droite qui contiendra les trois points d'intersection des côtés du circonscrit avec leurs opposés respectifs dans l'inscrit a pour équation

$$aA+bB+cC=0\ ;$$

enfin, le point de concours des trois droites qui joignent les sommets de l'inscrit à leurs opposés respectifs dans le circonscrit est donné par la double équation

$$aA=bB=cC\ .$$

Supposons présentement que les trois fonctions A, B, C de x et de y, au lieu d'être linéaires soient d'un même degré ou d'une même classe, et convenons d'appeler triangle du $m.^{ieme}$ degré ou de $m.^{ieme}$ classe le système de trois courbes de ce degré ou de cette classe ; dès lors le théorème que nous venons d'établir, combiné avec le principe des polaires réciproques, en fournira deux autres, très-généraux, sur les systèmes de trois courbes de même degré ou de même classe que l'indigence de la langue, qui n'a pas été créée pour des considérations si générales, se refuse, pour ainsi dire, à énoncer.

§. II.

Supposons présentement que A, B, C soient des fonctions linéaires en x, y, z; alors l'équation

$$ABC=0$$

sera celle d'un angle trièdre dont les faces, les angles dièdres respectivement opposés et les arêtes de ces angles trièdres seront donnés par les équations

$$\begin{array}{ccc} A=0\,, & B=0\,, & C=0\,, \\ BC=0\,, & CA=0\,, & AB=0\,, \\ \left\{\begin{array}{l} B=0\,, \\ C=0\,; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} C=0\,, \\ A=0\,; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} A=0\,, \\ B=0\,; \end{array}\right. \end{array}$$

l'équation commune à toutes les surfaces coniques du second ordre circonscrites sera

$$aBC+bCA+cAB=0\,.$$

Si l'on circonscrit à l'une de ces surfaces coniques un nouvel angle trièdre, de telle sorte que ses lignes de contact avec la surface conique soient les arêtes de l'inscrit, cet angle trièdre aura pour équation

$$(cB+bC)(aC+cA)(bA+aB)=0\,;$$

les trois droites, suivant lesquelles les faces de l'angle trièdre inscrit couperont celles du circonscrit, seront situées dans un même plan ayant pour équation

$$bcA+caB+abC=0$$

enfin, les trois plans conduits par les arêtes du circonscrit et par leurs opposées respectives dans l'inscrit se couperont suivant une même droite donnée par la double équation

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\ .$$

On aura donc ce double théorème :

THÉORÈME. Deux angles trièdres étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface conique du second ordre, de telle sorte que les arêtes de l'inscrit soient les lignes de contact du circonscrit ;

Les droites suivant lesquelles les faces de l'inscrit coupent leurs opposées respectives dans le circonscrit sont toutes trois dans un même plan.

Les plans conduits par les arêtes du circonscrit et par leurs opposées respectives dans l'inscrit passent tous trois par la même droite.

Il est clair que cette droite et ce plan sont polaires l'un de l'autre, par rapport à la surface conique, considérée comme directrice.

Si l'on suppose que le centre commun de la surface conique et des deux angles trièdres soit le centre d'une sphère, on obtiendra, pour des figures construites sur une surface sphérique, un théorème analogue à celui que nous venons d'établir.

En supposant toujours que l'équation

$$ABC=0$$

est celle d'un angle trièdre, l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre inscrites sera

$$a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-2bcBC-2caCA-2abAB=0\ ;$$

l'angle trièdre inscrit ayant pour ses arêtes les lignes de contact du circonscrit aura pour équation

$$(bB+cC-aA)(cC+aA-bB)(bB+cC-aA)=0\ ;$$

le plan des trois droites suivant lesquelles les faces du circonscrit coupent leurs opposées respectives dans l'inscrit aura pour équation

$$aA+bB+cC=0\ ;$$

enfin, la droite suivant laquelle se couperont les trois plans conduits par les arêtes de l'inscrit et par leurs opposées respectives dans le circonscrit sera donnée par la double équation

$$aA=bB=cC\ .$$

Si l'on suppose que les fonctions A, B, C, de x, y, z sont d'un même degré quelconque, supérieur au premier, on obtiendra, sans aucun nouveau calcul, des théorèmes très-généraux sur le système de trois surfaces d'un même dégré ou d'une même classe, situées d'une manière quelconque dans l'espace.

§. III.

Soient présentement A, B, C, D quatre fonctions linéaires indépendantes quelconques en x, y, z ; l'équation

$$ABCD=0 \qquad (1)$$

sera celle d'un tétraèdre quelconque dont les faces, les angles trièdres respectivement opposés et les sommets correspondans seront donnés par les équations

$$A=0\ , \qquad B=0\ , \qquad C=0\ , \qquad D=0\ ; \qquad (2)$$

$$BCD=0\ , \qquad CAD=0\ , \qquad ABD=0\ , \qquad ABC=0\ , \qquad (3)$$

$$\left\{\begin{array}{l} B=0\,, \\ C=0\,, \\ D=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} C=0\,, \\ A=0\,, \\ D=0\,, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A=0\,, \\ B=0\,, \\ D=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A=0\,, \\ B=0\,, \\ C=0\,. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Quant aux trois couples d'angles dièdres respectivement opposés elles seront données par les équations

$$\left.\begin{array}{lll} BC=0\,, & CA=0\,, & AB=0\,, \\ AD=0\,, & BD=0\,, & CD=0\,; \end{array}\right\} \quad (5)$$

et les arêtes qui leur appartiennent le seront par celles-ci:

$$\left.\begin{array}{lll} \left\{\begin{array}{l} B=0\,, \\ C=0\,, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} C=0\,, \\ A=0\,, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} A=0\,, \\ B=0\,, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} A=0\,, \\ D=0\,, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} B=0\,, \\ D=0\,, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} C=0\,, \\ D=0\,. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Si a, b, c, α, β, γ sont six constantes arbitraires qu'on peut d'ailleurs supposer liées, en tout ou en partie, par une relation quelconque, non homogène, l'équation du second degré

$$aBC+bCA+cAB+\alpha AD+\beta BD+\gamma CD=0\,, \quad (7)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre (1) ; car son premier membre est la seule fonction du second degré en x, y, z qui puisse s'évanouir en y supposant nulles, trois quelconques des quantités A, B, C, D.

Si, avec cette équation, on combine tour à tour les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} bC+cB+\alpha D=0\ , \\ cA+aC+\beta D=0\ , \\ aB+bA+\gamma D=0\ , \\ \alpha A+\beta B+\gamma C=0\ , \end{array}\right\} \qquad (8)$$

qui sont celles de quatre plans passant respectivement par les sommets (4) du tétraèdre (1) ; elles la réduiront respectivement aux quatre suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} aBC+\beta BD+\gamma CD=0\ , \\ bCA+\gamma CD+\alpha AD=0\ , \\ cAB+\alpha AD+\beta BD=0\ , \\ aBC+bCA+cAB=0\ ; \end{array}\right\} \qquad (9)$$

d'où il résulte que, dans la recherche des intersections des plans (8) avec la surface (7), il revient au même de substituer à cette surface celles des surfaces (9) qui correspondent respectivement aux plans (8) ; or, il est aisé (§. II.) de reconnaître les surfaces (9) pour des surfaces coniques respectivement circonscrites aux angles trièdres (3), lesquelles ne sauraient conséquemment avoir de commun, avec ceux des plans (8) qui leur correspondent respectivement, qu'un point ou le système de deux droites ; donc, les plans (8) n'ont pareillement de commun avec la surface (7) qu'un point ou le système de deux droites ; donc enfin ces plans (8) sont les plans tangens menés à cette surface par les sommets (4) du tétraèdre (1) ; ils forment donc, par leur ensemble, un tétraèdre circonscrit dont les points de contact sont les sommets de l'inscrit ; tétraèdre dont l'équation est conséquemment

$$(bC+cB+\alpha D)(cA+aC+\beta D)(aB+bA+\gamma D)(\alpha A+\beta B+\gamma C)=0. \quad (10)$$

Les faces du tétraèdre circonscrit coupent leurs opposées respectives dans l'inscrit, suivant des droites données par les couples d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} bC+cB+\alpha D=0\ , & A=0\ , \\ cA+aC+\beta D=0\ , & B=0\ , \\ aB+bA+\gamma D=0\ , & C=0\ , \\ \alpha A+\beta B+\gamma C=0\ , & D=0\ . \end{array}\right\} \quad (11)$$

Pour que l'une quelconque des trois premières droites soit dans le même plan avec la dernière, il faut qu'en éliminant entre leurs quatre équations les trois coordonnées x, y, z, ou, ce qui revient au même, les trois rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on parvienne à une équation identique; or, on obtient ainsi les trois équations

$$\beta b=\gamma c\ , \qquad \gamma c=\alpha a\ , \qquad \alpha a=\beta b\ , \qquad (12)$$

qui peuvent fort bien ne point avoir lieu ; donc , généralement parlant, deux de ces quatre droites ne sont pas situées dans un même plan, à plus forte raison donc n'y sont-elles pas toutes quatre ; d'où il résulte que la première partie du théorème proposé à démontrer à la pag. 18 du présent volume n'est pas généralement vraie.

De ce que chacune des équations (12) est comportée par les deux autres, on peut conclure que, si parmi les quatre droites (11), il s'en trouve deux dont chacune soit en particulier dans un même plan avec l'une des deux droites restantes , ces deux droites restantes seront aussi elles-mêmes dans un même plan qui d'ailleurs sera, généralement parlant, différent du plan des deux autres.

Si l'on cherche les conditions nécessaires pour que les trois premières droites (11) soient deux à deux dans un même plan, on retombera de nouveau sur les équations (12); d'où l'on est fondé à conclure que, toutes les fois que deux quelconques des quatre droites (11) sont dans un même plan, les deux droites restantes sont aussi dans un même plan qui, en général, peut être différent du premier.

Mais on voit en même temps que, si l'on avait la double équation

$$\alpha a=\beta b=\gamma c\ , \qquad (13)$$

les quatre droites (11) seraient toutes alors comprises dans un seul et même plan.

En représentant chacun de ces trois produits par k^2, on aura

$$\alpha=\frac{k^2}{a}\ ,\qquad \beta=\frac{k^2}{b}\ ,\qquad \gamma=\frac{k^2}{c}\ .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (7), elle deviendra

$$ABC\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)+k^2D\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)=0\ ; \qquad (14)$$

telle est donc la forme particulière que doit prendre l'équation commune aux surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre (1), pour qu'en leur circonscrivant un autre tétraèdre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, les intersections des faces respectivement opposées dans les deux tétraèdres soient toutes quatre comprises dans un même plan. Quant à l'équation de ce plan, on trouvera facilement qu'elle est

$$bcA+caB+abC+k^2D=0\ . \qquad (15)$$

Trois quelconques des quatre droites (11) déterminant une surface gauche du second ordre, cherchons quelle condition serait nécessaire pour que cette surface gauche contînt également la quatrième.

En cherchant l'équation de la surface du second ordre engendrée par une droite mobile sur les trois premières droites (11), considérées comme directrices fixes, on obtient

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\beta\gamma D^2+\alpha(\beta b+\gamma c)A \\ +\beta(\gamma c+\alpha a)B \\ +\gamma(\alpha a+\beta b)C\end{array}\right| D+(\alpha A+\beta B+\gamma C)(bcA+caB+abC)=0\;; \quad (16)$$

équation que l'on peut d'ailleurs s'assurer directement être satisfaite par chacune des trois premières équations (11), en particulier : or, il est manifeste qu'elle l'est aussi par la quatrième ; donc, la surface gauche du second ordre, déterminée par trois quelconques des quatre droites (11), contient aussi la quatrième, de telle sorte que ces quatre droites se trouvent dans le cas de celles dont il a été question à la pag. 182 du présent volume, lorsque le problème traité en cet endroit devient indéterminé.

Les sommets du tétraèdre circonscrit (10) sont donnés par les équations (8) de ses faces prises tour à tour trois à trois, ou par toute combinaison qu'on voudra faire entre les trois équations de chacun de ces quatre groupes ; d'où il suit que si, entre les trois équations de chacun de ses quatre mêmes groupes, on élimine la lettre qui leur est commune, les quatre doubles équations qu'on obtiendra appartiendront à un nombre égal de droites passant respectivement par les sommets du tétraèdre circonscrit ; or, ces quatre couples sont

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Pour le sommet opposé à } BCD, & \dfrac{\beta B+\gamma C}{\alpha}=\dfrac{aB+\gamma D}{b}=\dfrac{aC+\beta D}{c}, \\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } CAD, & \dfrac{\gamma C+\alpha A}{\beta}=\dfrac{bC+\alpha D}{c}=\dfrac{bA+\gamma D}{a}, \\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } ABD, & \dfrac{\alpha A+\beta B}{\gamma}=\dfrac{cA+\beta D}{a}=\dfrac{cB+\alpha D}{b}, \\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } ABC, & \dfrac{bC+cB}{\alpha}=\dfrac{cA+aC}{\beta}=\dfrac{aB+bA}{\gamma}\;;\end{array}\right\} \quad (17)$$

or, ces équations sont respectivement satisfaites par celles (4) des quatre sommets du tétraèdre inscrit (1) ; donc ce sont celles des quatre droites qui joignent les sommets du circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit.

Pour que l'une quelconque des trois premières droites (17) rencontre la dernière, il faut qu'en éliminant, entre leurs quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, ou ce qui revient au même, les trois rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on parvienne ainsi à une équation identique ; or, on obtient ainsi, tour à tour, les trois équations

$$\beta b=\gamma c\,, \qquad \gamma c=\alpha a\,, \qquad \alpha a=\beta b\,, \qquad (12)$$

déjà obtenues ci-dessus, et qui peuvent fort bien ne pas avoir lieu ; donc, généralement parlant, aucune des trois premières droites (17) ne rencontre la quatrième ; et, à plus forte raison, ne concourent-elles pas toutes quatre en un même point. La seconde partie du théorème de la pag. 18, n'est donc par plus vraie que la première. On voit en même que deux des droites (17) concourront ou ne concourront pas en un même point, suivant que deux des droites (11) seront ou ne seront pas dans un même plan.

De ce que chacune des équations (12) est comportée par les deux autres, on en doit conclure que, si parmi les quatre droites (17), il s'en trouve deux dont chacune en particulier rencontre l'une des deux restantes, ces deux dernières se rencontreront aussi en un point qui sera, en géneral, différent du point de rencontre des deux premières.

Si l'on cherche les conditions nécessaires pour que deux des trois premières droites (17) concourent en un même point, on retombera de nouveau sur les équations (12) ; d'où l'on est fondé à conclure qu'en général, toutes les fois que deux de nos quatre droites concourent en un même point, les deux restantes concourront aussi en un même point qui pourra être d'ailleurs différent du premier ; on voit au surplus qu'il en arrivera ainsi toutes les fois que deux des quatre droites (11), étant dans un même plan, les deux restantes seront aussi dans un même plan.

Mais on voit, en même temps, que, si l'on avait la double équation

$$\alpha a=\beta b=\gamma c\ , \qquad (13)$$

les quatre droites concourraient dès lors en un seul et même point. C'est le cas où les quatre droites (11) sont dans un même plan, et où l'équation (7) prend la forme (14). En représentant, comme alors, par k^2 chacun des produits (13), le point de concours de nos quatre droites (17) sera donné par la triple équation

$$bcA=caB=abC=k^2D\ . \qquad (18)$$

Trois quelconques des quatre droites (17) déterminent une surface gauche du second ordre, et l'on peut se proposer de connaître dans quel cas la quatrième droite se trouvera aussi sur cette surface. En cherchant, par exemple, l'équation de la surface gauche déterminée par les trois premières, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}(\beta b-\gamma c)(\beta b+\gamma c-\alpha a)(aBC+\alpha AD)\\ +(\gamma c-\alpha a)(\gamma c+\alpha a-\beta b)(bCA+\beta BD)\\ +(\alpha a-\beta b)(\alpha a+\beta b-\gamma c)(cAB+\gamma CD)\end{array}\right\}=0\ ; \qquad (19)$$

or, il est facile de s'assurer que cette équation est aussi satisfaite par la dernière des doubles équations (17), ce qu'atteste d'ailleurs la symétrie qu'on y remarque, d'où l'on doit conclure que les quatre droites (17), comme les quatre droites (11), appartiennent généralement à une seule et même surface gauche du second ordre. On a donc ce théorème :

THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact *des faces du circonscrit, les faces respectivement opposées des deux tétraèdres se couperont suivant quatre droites, et leurs sommets respectivement opposés détermineront quatre autres droites.*

Or, 1.° *les droites de chaque groupe appartiendront généralement, toutes quatre, à une seule et même surface gauche du second ordre;*

2.° *Si la surface gauche du second ordre qui contient les quatre premières droites se réduit au système de deux plans, l'un de ces plans contiendra deux de ces droites, tandis que l'autre contiendra les deux restantes, et alors deux des quatre dernières droites concourront en un même point, et les deux autres en un autre point;*

3.° *Si enfin la surface gauche du second ordre qui contient les quatre premières droites se réduit à un plan unique, la surface gauche du second ordre qui contiendra les quatre dernières se réduira à une surface conique, au sommet de laquelle elles concourront toutes* (*).

(*) Par une lettre en date du 19 janvier dernier, M. Steiner nous mande de Berlin qu'il est parvenu, de son côté, à un théorème tout à fait pareil à celui-là, dont il ne nous indique pas d'ailleurs la démonstration : mais, de quelque poids que puisse être, en cette matière, l'assertion d'un géomètre aussi distingué, quelque irréprochable que paraisse, sous tous les rapports, l'élégante et lumineuse analyse de M. Bobillier, et quelque confiance enfin que puisse inspirer l'accord presque simultané sur une même question (la lettre de M. Bobillier porte la date du 24 janvier) de deux géomètres séparés l'un de l'autre par un intervalle de plusieurs centaines de lieues, et qui ne paraissent avoir jamais eu entre eux aucune relation directe, nous ne devons pas négliger d'observer qu'il s'élève, contre le théorème auquel ils sont parvenus, une objection assez grave que nous nous bornerons à exposer, en laissant à de plus habiles que nous le soin de la résoudre.

1.° Soient, dans l'espace, quatre droites indéfinies, non comprises deux à deux dans un même plan, mais d'ailleurs quelconques. Par ces droites faisons passer quatre plans, de manière à former un tétraèdre t. Par ces mêmes droites, et par les sommets du tétraèdre opposés respectivement aux fa-

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'en prenant pour surface directrice la surface du second ordre à laquelle les deux tétraèdres sont inscrit et circonscrit, 1.° les quatre droites de chaque groupe sont les polaires conjuguées respectives des quatre droites de l'autre groupe ; 2.° lorsque les quatre droites du premier groupe sont dans deux plans, les deux points où concourent deux à deux les quatre droites de l'autre groupe sont les pôles respectifs de ces deux plans, et la droite qui les joint la polaire conjuguée de l'intersection de ces deux mêmes plans ; 3.° enfin, lorsque les droites du premier

---

ces dans les plans desquelles elles se trouvent situées, faisons passer quatre nouveaux plans, ceux-ci formeront un nouveau tétraèdre T, circonscrit au premier, et nos quatre droites arbitraires seront celles suivant lesquelles se couperont les faces respectivement opposées des deux tétraèdres.

2.° Soient encore, dans l'espace, quatre droites indéfinies, non comprises deux à deux dans un même plan, mais toujours quelconques. Sur ces droites soient pris quatre points, de manière à pouvoir en faire les sommets d'un tétraèdre T. Soient considérés les points où ces quatre droites percent respectivement les plans des faces opposées aux sommets par lesquels elles passent, comme les sommets d'un nouveau tétraèdre *t*, inscrit au premier, nos quatre droites arbitraires seront celles qui joindront les sommets respectivement opposés des deux tétraèdres.

3.° Il paraîtrait donc établi par là qu'on peut toujours concevoir deux tétraèdres circonscrits l'un à l'autre, soit de manière que les plans des faces respectivement opposées se coupent suivant quatre droites tout à fait arbitraires, soit que les droites qui joindront les sommets respectivement opposés soient quatre droites tout à fait arbitraires. En particulier, on peut choisir, soit les quatre premières droites, soit les quatre dernières, de telle sorte qu'elles n'appartiennent pas toutes quatre à une même surface gauche du second ordre.

4.° Cela posé, on sait que, pour déterminer une surface du second ordre, il faut *neuf* conditions distinctes ; d'où il suit que, non seulement il est toujours possible de concevoir une surface du second ordre qui touche quatre plans donnés en quatre points donnés, mais même qu'il en existe une infinité qui satisfont toutes à ces conditions, puisqu'elles n'équivalent qu'à *huit* seulement.

5.° On pourra donc, dans nos deux cas ci-dessus, circonscrire au tétraègroupe sont comprises toutes quatre dans un seul et même plan, le pôle de ce plan est le point où concourent les quatre droites du second groupe.

Si l'on pose

$$bC+cB+\alpha D=A' ,$$
$$cA+aC+\beta D=B' ,$$
$$aB+bA+\gamma D=C' ,$$
$$\alpha A+\beta B+\gamma C=D' ;$$

en faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\beta b+\gamma c-\alpha a=p ,\\ \gamma c+\alpha a-\beta b=q ,\\ \alpha a+\beta b-\gamma c=r ,\end{array}\right\}\quad \text{d'où}\quad \left\{\begin{array}{l}2\alpha a=q+r ,\\ 2\beta b=r+p ,\\ 2\gamma c=p+q ;\end{array}\right.$$

on en tirera,

$$A=\frac{rb(p+q)B'+qc(r+p)C'-a(r+p)(p+q)A'+2pabcD'}{2bc(pq+qr+rp)} ,$$

$$B=\frac{pc(q+r)C'+ra(p+q)A'-b(p+q)(q+r)B'+2qabcD'}{2ca(pq+qr+rp)} ,$$

---

dre t une infinité de surfaces du second ordre qui soient en même temps inscrites à T; d'où il paraîtrait résulter que deux tétraèdres t et T étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des faces du circonscrit, il peut fort bien arriver, contrairement au théorème, que soit l'intersection des plans des faces respectivement opposées, soit les droites qui joignent les sommets respectivement opposés, soient quatre droites tout à fait arbitraires, non assujetties conséquemment à se trouver sur une seule et même surface gauche du second ordre.

J. D. G.

$$C=\frac{qa(r+p)A'+pb(q+r)B'-c(q+r)(r+p)C'+2rabcD'}{2ab(pq+qr+rp)},$$

$$D=\frac{paA'+qbB'+rcC'-2abcD'}{2(pq+qr+rp)}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules ci-dessus, et supprimant ensuite les accens, devenus dès lors inutiles, on obtiendra des formules relatives au cas où ce serait le tétraèdre circonscrit, et non l'inscrit, qui serait donné par l'équation

$$ABCD=0.$$

Si, au lieu de supposer que les quatre fonctions A, B, C, D sont linéaires, on les supposait d'un même degré quelconque, on obtiendrait, sans aucun nouveau calcul, des théorèmes très-généraux sur le système de quatre surfaces du même degré ou de même classe, situées d'une manière quelconque dans l'espace.