
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

TIMMERMANS

**Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé à
la pag. 156 du présent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 250-251

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__250_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé à la pag. 156 du présent volume ;

Par M. LENTHÉRIC, professeur au Collège royal de Montpellier, et M. TIMMERMANS, professeur à l'Athénée de Tournay.



THÉORÈME. *Deux tétraèdres sont équivalens lorsque les deux mêmes droites indéfinies, non situées dans un même plan, contiennent, à la fois, deux arêtes opposées de l'un et deux arêtes opposées de l'autre, et qu'en outre le rectangle de ces deux arêtes, dans le second, est équivalent au rectangle de leurs correspondantes dans le premier.*

Ce théorème est un corollaire manifeste du suivant qui, en conséquence, est le seul qu'il soit nécessaire de démontrer.

THÉORÈME. *Le volume d'un tétraèdre a pour expression le sixième du produit des longueurs de deux arêtes opposées quelconques, de la longueur de leur perpendiculaire commune, et du sinus tabulaire de l'angle qu'elles forment entre elles.*

Démonstration. Soit ABCD (fig. 5) un tétraèdre, et soit EF la perpendiculaire commune à ses deux arêtes opposées AB et CD. Il s'agit de prouver que le volume de ce tétraèdre a pour expression

$$\frac{1}{6} AB \times CD \times EF \times \text{Sin.}(AB, CD) .$$

Pour y parvenir achevons le parallélogramme dont la face CDB

est la moitié et dont BC est la diagonale ; et soit G son quatrième sommet. Sur BA, BD, BG, comme arêtes d'un même angle, construisons un parallépipède. Soit K le sommet de ce parallépipède opposé à B ; et soient H et L ses sommets respectivement opposés à G et D.

Puisque EF est perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD, cette droite sera aussi une perpendiculaire commune aux plans parallèles AG et CH qui contiennent ces deux arêtes, et sera conséquemment la hauteur du parallépipède si l'on prend AG pour sa base. L'aire de cette base aura d'ailleurs pour expression $AB \times BG \times \text{Sin.} \angle ABG$ ou parce que BG est égal et parallèle à CD, l'aire de cette base sera $AB \times CD \times \text{Sin.}(\angle AB, CD)$; de sorte que le volume du parallépipède sera exprimé par

$$AB \times CD \times EF \times \text{Sin.}(\angle AB, CD) ;$$

mais si l'on prend BH pour base du parallépipède et ABD comme celle du tétraèdre, ce tétraèdre se trouvera avoir même hauteur que le parallépipède et une base moitié de la sienne. Son volume n'est donc que le sixième de celui du parallépipède ; ce volume doit donc avoir pour expression

$$\frac{1}{6} AB \times CD \times EF \times \text{Sin.}(\angle AB, CD)$$

comme on l'avait annoncé.
