ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER
LENTHÉRIC

Démonstration du théorème de statique énoncé à la page 199 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 338-347
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__338_1>

Démonstration du théorème de statique énoncé à la page 199 du présent volume ;

Par M. Bobillier, professeur de mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne,

Et M. Lenthéric, professeur de mathématiques et de physique au Collége royal de Montpellier.

Théorème. Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n *des droites représentant en intensité et en direction des forces appliquées respectivement à des points quelconques* A_1, A_2, A_3, ... A_n, *invariablement liés entre eux, mais d'ailleurs parfaitement libre dans l'espace. Soient* PD_1, PD_2, PD_3, ... PD_n, *des droites respectivement parallèles et égales à celles-là, conduites par un même point quelconque* P *de l'espace. Soient* PG_1, PG_2, PG_3, ... PG_n d'*autres droites, respectivement perpendiculaires aux plans des triangles* PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3, ... PA_nB_n, *et proportionnelles à leurs surfaces. Soient enfin* Δ *le centre des moyennes distances des points* D_1, D_2, D_3, ... D_n *et* Γ *le centre des moyennes distances des points* G_1, G_2, G_3, ... G_n.

1.° *Pour qu'il y ait équilibre entre les forces dont il s'agit, il est nécessaire et il suffit qu'on ait à la fois,*

$$P\Delta=o\,, \qquad P\Gamma=o\,,$$

ou, en d'autres termes, que le point P *soit le centre commun des moyennes distances tant du système des points* D_1, D_2, D_3, ... D_n *que du système des points* G_1, G_2, G_3, ... G_n

2.° *Lorsqu'aucune de ces conditions n'étant remplie, l'angle* $\Delta P\Gamma$ *n'est pas droit, les forces du système ont deux résultantes, situées dans des plans différens.*

3.° *Si, au contraire, l'angle* $\Delta P\Gamma$ *est droit, elles admettent une résultante unique, parallèle à* $P\Delta$ *et représentée en intensité par* $n.P\Delta$.

4.° *Si, en particulier,* $P\Gamma=o$, *cette résultante unique se confond avec* $P\Delta$.

5.° *Si, au contraire, on a seulement* $P\Delta=o$, *les forces du système se réduisent à un couple.*

Démonstration. Désignons respectivement pour abréger, par P_1, P_2, P_3, ... P_n les forces A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n. Par le point P, que nous supposons invariablement lié au système, imaginons deux forces égales et parallèles à P_1, mais directement opposées, deux forces égales et parallèles à P_2, mais directement opposés et ainsi de suite, jusqu'à la dernière P_n. Nous aurons ainsi des forces égales et parallèles à celles du système et agissant dans le même sens qu'elles, appliquées en P, et se réduisant conséquemment à une force unique passant par ce point, si toutefois elles ne se font pas équilibre et n couples P_1—P_1, P_2—P_2, P_3—P_3, ... P_n—P_n; et il n'y aura rien de changé à l'état du système. Les forces appliquées au point P seront représentées en intensité et en direction par PD_1, PD_2, PD_3, ... PD_n, d'où il suit que, si Δ est le centre des moyennes distances des points D_1, D_2, D_3, ... D_n, leur résultante sera représentée en intensité par $n.\mathrm{P}\Delta$ et dirigée suivant $\mathrm{P}\Delta$ (*).

Les axes des couples seront des droites respectivement perpendiculaires à leurs plans, c'est-à-dire, aux plans des triangles $\mathrm{PA_1B_1}$, $\mathrm{PA_2B_2}$, $\mathrm{PA_3B_3}$, ... $\mathrm{PA}_n\mathrm{B}_n$ et proportionnels à leurs momens ou énergies; ces axes seront donc représentés, en grandeur et en direction, par $\mathrm{PG_1}$, $\mathrm{PG_2}$, $\mathrm{PG_3}$, ... PG_n; car ces droites, d'après l'énoncé, sont respectivement perpendiculaires aux plans des triangles $\mathrm{PA_1B_1}$, $\mathrm{PA_2B_2}$, $\mathrm{PA_3B_3}$, ... $\mathrm{PA}_n\mathrm{B}_n$, qui sont les mêmes que ceux des couples et proportionnelles aux aires de ces triangles, lesquelles aires sont respectivement moitiés des rectangles qui expriment l'énergie des couples.

Or, il est connu, par la théorie que M. Poinsot a développée dans sa Statique, que la composition des couples dont les bras de leviers ont une extrémité commune s'opère en composant leurs axes comme si c'était autant de forces. Or, ces axes étant ici $\mathrm{PG_1}$, $\mathrm{PG_2}$, $\mathrm{PG_3}$, ... PG_n et Γ étant supposés le centre des moyennes distances des points $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{G_3}$, ... G_n, il s'ensuit que l'axe du couple résultant sera dirigé suivant $\mathrm{P}\Gamma$ et représenté en longueur par $n.\mathrm{P}\Gamma$.

Ainsi, tout le système dont il s'agit peut être réduit à une force dirigée suivant $\mathrm{P}\Delta$ et représentée en intensité par $n.\mathrm{P}\Delta$ et à un couple dont l'axe, dirigé suivant $\mathrm{P}\Gamma$, aura pour longueur $n.\mathrm{P}\Gamma$.

Cela posé, veut-on 1.° que le système soit en équilibre ? Il sera nécessaire et il suffira pour cela que la résultante $n.\mathrm{P}\Delta$ et le couple $n.\mathrm{P}\Gamma$ soient séparément nuls; ce qui donnera, comme l'annonce le théorème,

$$\mathrm{P}\Delta=0\,,\qquad \mathrm{P}\Gamma=0\,.$$

2.° Lorsque ces deux conditions ne seront point remplies l'une

(*) *Annales*, tom. XVI, pag. 30.

et l'autre, le système ne sera point en équilibre, mais PΔ et PΓ n'étant ni nuls ni perpendiculaires l'un à l'autre, la force n.PΔ ne sera point dans le plan du couple; et en la composant avec celle des deux forces de ce couple qui passe par le point P, il en résultera une force unique qui ne sera point dans le plan de ce couple et qui conséquemment ne pourra être comprise dans un même plan avec l'autre force de ce couple et ne pourra, par suite, être composée avec elle en une force unique, de sorte que le système aura deux résultantes.

3.° Si, au contraire l'angle ΔPΓ est droit, la force n.PΔ, située alors dans le plan du couple, pourra se composer, avec la force du couple qui passe par le point P, en une force unique située dans ce plan, mais qui ne sera point parallèle à l'autre force du couple, ou du moins ne lui sera point égale; de manière qu'elle pourra se composer avec elle en une seule force, à laquelle se réduira alors tout le système.

4.° Si PΓ seul est nul, le couple est nul aussi, et la résultante unique du système se réduit à n.PΔ, dirigée suivant PΔ.

5.° Si enfin c'est PΔ seul qui est nul, il ne reste plus que le couple auquel se réduit alors tout le système (*).

Le théorème que nous venons de démontrer conduit aux conditions d'équilibre d'un système libre de forme invariable, et aux conséquences qu'on a coutume d'en déduire, d'une manière fort simple. Soient conduits, par le point P, trois axes rectangulaires, faisons

$$\mathrm{A_1B_1}=p' , \quad \mathrm{A_2B_2}=p'' , \quad \mathrm{A_3B_3}=p''' , \ldots..$$

(*) Ce qu'on vient de lire appartient en commun à MM. Lenthéric et Bobillier : ce qui suit appartient uniquement à M. Bobillier.

J. D. G

soient α', β', γ', α'', β'', γ'', α''', β''', γ''', ... les angles de ces droites avec les axes des x des y et des z ; soient encore (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), ... les points A_1, A_2, A_3, ... Soient enfin D, E, F les coordonnées du point Δ, G, H; K celles du point Γ, d, e, f les angles que forme $P\Delta$ avec les axes des coordonnées ; et g, h, k les angles que forme $P\Gamma$ avec les mêmes axes.

Nous aurons d'abord

$$\left.\begin{array}{ll} P\Delta=\sqrt{D^2+E^2+F^2}\,, & P\Gamma=\sqrt{G^2+H^2+K^2}\,, \\ \text{Cos.}d=\dfrac{D}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}g=\dfrac{G}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,, \\ \text{Cos}\,e=\dfrac{E}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}h=\dfrac{H}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,, \\ \text{Cos}f=\dfrac{F}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}\,, & \text{Cos.}k=\dfrac{K}{\sqrt{G^2+H^2+K^2}}\,. \end{array}\right\}\quad(1)$$

Les coordonnées des points D_1, D_2, D_3, ... ne seront autre chose que les projections sur les trois axes des droites PD_1, PD_2, PD_3, ... et seront conséquemment exprimées par

$$\begin{array}{lll} P'\text{Cos.}\alpha'\,, & P'\text{Cos.}\beta'\,, & P'\text{Cos.}\gamma'\,, \\ P''\text{Cos.}\alpha''\,, & P''\text{Cos}\,\beta''\,, & P''\text{Cos.}\beta''\,, \\ P'''\text{Cos.}\alpha'''\,, & P'''\text{Cos.}\beta'''\,, & P'''\text{Cos.}\beta'''\,, \\ \ldots\ldots\,; & \ldots\ldots\,; & \ldots\ldots\,; \end{array}$$

et on aura de plus, par la définition du point Δ

$$\left.\begin{array}{l} nD = P'\mathrm{Cos}.\alpha' + P''\mathrm{Cos}.\alpha'' + P'''\mathrm{Cos}.\alpha''' + \ldots \\ nE = P'\mathrm{Cos}.\beta' + P''\mathrm{Cos}.\beta'' + P'''\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots \\ nF = P'\mathrm{Cos}.\gamma' + P''\mathrm{Cos}.\gamma'' + P'''\mathrm{Cos}.\gamma''' + \ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si l'on désigne par t', u', v', respectivement les inclinaisons du plan du triangle PA_1B_1 sur les plans des yz, des zx et des xy, $180^\circ - t'$, $180^\circ - u'$, $180^\circ - v'$ seront les angles de la droite PG_1 avec les trois axes; et les coordonnées du point G_1 seront exprimées par $-PA_1B_1\mathrm{Cos}\,t'$, $-PA_1B_1\mathrm{Cos}.u'$, $-PA_1B_1\mathrm{Cos}.v'$, c'est-à-dire, par les projections du triangle PA_1B_1 sur les plans coordonnés, prises en signes contraires.

Pour déterminer l'aire de la projection du triangle PA_1B_1 sur le plan des xy, on remarquera que la projection de la base A_1B_1 est $P'\mathrm{Sin}.\gamma'$ et que l'équation de cette projection est

$$y - y' = \frac{\mathrm{Cos}.\beta'}{\mathrm{Cos}.\alpha'}(x - x')\ ;$$

sa hauteur est égale à

$$\frac{-y'\mathrm{Cos}.\alpha' + x'\mathrm{Cos}.\beta'}{\sqrt{\mathrm{Cos}.^2\alpha' + \mathrm{Cos}.^2\beta'}}\ ;$$

ou, à cause de la relation $\mathrm{Cos}.^2\alpha' + \mathrm{Cos}.^2\beta' + \mathrm{Cos}.^2\gamma' = 1$,

$$-\frac{y'\mathrm{Cos}.\alpha' - x'\mathrm{Cos}.\beta'}{\mathrm{Sin}\,\gamma'}\ ;$$

conséquemment, la coordonnée z du point G_1 sera

$$\tfrac{1}{2}P'(y'\text{Cos.}\alpha-x'\text{Cos.}\beta')$$

et on trouvera de même, pour les coordonnées x et y du même point

$$\tfrac{1}{2}P'(z'\text{Cos}\,\beta'-y'\text{Cos.}\alpha')\ ,\qquad \tfrac{1}{2}P'(x'\text{Cos.}\gamma'-z'\text{Cos.}\alpha')\ ,$$

les coordonnées des points G_2, G_3, ... auront des valeurs analogues; d'où il suit qu'on aura, d'après la définition du point Γ,

$$\left.\begin{aligned}2nG&=P'(z'\text{Cos.}\beta'-y'\text{Cos.}\gamma')+P''(z''\text{Cos.}\beta''-y''\text{Cos.}\gamma'')+\ldots\ldots\\2nH&=P'(x'\text{Cos.}\gamma'-z'\text{Cos.}\alpha')+P''(x''\text{Cos.}\gamma''-z''\text{Cos.}\alpha'')+\ldots\ldots\\2nK&=P'(y'\text{Cos.}\alpha'-x'\text{Cos.}\beta')+P''(y''\text{Cos.}\alpha''-x''\text{Cos.}\beta'')+\ldots\end{aligned}\right\}\ (3)$$

Présentement, désignons respectivement par X, Y, Z, T, U, V les seconds membres des équations (2) et (3); elles deviendront ainsi

$$nD=X\ ,\qquad nE=Y\ ,\qquad nF=Z\ ,$$

$$2nG=T\ ,\qquad 2nH=U\ ,\qquad 2nK=V\ ;$$

tirant de là les valeurs de D, E, F, G, H, K, pour les substituer dans les équations (1), on aura

$$n.\text{P}\Delta=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ ,\qquad 2n.\text{P}\Gamma=\sqrt{T^2+U^2+V^2}\ ,$$

$$\text{Cos}\,d=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\ ,\qquad \text{Cos.}g=\frac{T}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\ ,$$

$$\text{Cos}.e=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\qquad \text{Cos}.h=\frac{U}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\,,$$

$$\text{Cos}\,f=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\qquad \text{Cos}.k=\frac{V}{\sqrt{T^2+U^2+V^2}}\,;$$

formules au moyen desquelles on peut déterminer les intensités et directions tant de la résultante que du couple résultant, en fonction des intensités des composantes, des coordonnées de leurs points d'application et des quantités angulaires qui en déterminent la direction.

Les équations de condition qui correspondent aux différens cas du théorème proposé se déduisent facilement de ces formules.

1.° Les équations $P\Delta=0$, $P\Gamma=0$, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système donnent

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=0\,;\qquad \sqrt{T^2+U^2+V^2}=0\,,$$

équations qui entraînent les suivantes :

$$X=0\,,\qquad Y=0\,,\qquad Z=0\,,$$

$$T=0\,,\qquad U=0\,,\qquad V=0\,.\quad (*)$$

2.° Pour exprimer que l'angle $\Delta P\Gamma$ est droit, et que, par suite,

---

(*) On trouve à la page 14 du VIII.e volume du présent recueil, pour parvenir aux équations d'équilibre, une méthode très-simple et très-symétrique, indépendante de théorie des couples ou de tout autre auxiliaire.

J. D. G.

le système est réductible à une force unique, on a l'équation

$$\mathrm{Cos}.d\,\mathrm{Cos}.g+\mathrm{Cos}.e\,\mathrm{Cos}.h+\mathrm{Cos}.f\,\mathrm{Cos}.k=0$$

qui devient, en substituant

$$TX+UY+VZ=0\;; \qquad (4)$$

3.° Pour exprimer qu'on a seulement $\mathrm{P}\Gamma=0$, ou que le système a une résultante unique, passant par l'origine des coordonnées, on aura l'équation unique

$$\sqrt{T^2+U^2+V^2}=0\,,$$

d'où résultent ces trois-ci

$$T=0\,,\qquad U=0\,,\qquad V=0\,,$$

4.° Enfin, pour exprimer que le système se réduit à un couple, il faudra écrire seulement $\mathrm{P}\Delta=0$, ou bien

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=0\,,$$

qui donne

$$X=0\,,\qquad Y=0\,,\qquad Z=0\,,$$

On peut remarquer que, dans ce dernier cas, la relation (4) est satisfaite, bien qu'alors il n'y ait pas une résultante unique. C'est, au surplus, le seul cas où elle puisse donner une fausse indication.

5.° Enfin, dans toutes les autres hypothèses qu'on voudra faire sur les six quantités T, U, V, X, Y, Z, le système pourra seulement se réduire à deux forces, non composables en une seule.

Si toutes les forces du système sont parallèles, les droites PD_1, PD_2, PD_3, ..., se confondront entre elles et avec $P\Delta$ et en outre PG_1, PG_2, PG_3, ..., étant perpendiculaires à $P\Delta$, se trouveront dans un plan perpendiculaire à cette droite. Le point Γ sera donc aussi dans ce plan; d'où il suit que l'angle $\Delta P\Gamma$ sera droit; il y aura donc une résultante unique, pourvu toutefois que l'on n'ait pas $P\Delta=o$.

Si toutes les forces du système sont situées dans un même plan: en prenant pour le point P un quelconque des points de ce plan, les droites PD_1, PD_2, PD_3, ..., ainsi que le point Δ, s'y trouveront aussi; en outre, les droites PG_1, PG_2, PG_3, ... perpendiculaires à ce plan, se confondront en une seule qui contiendra le point Γ; l'angle $\Delta P\Gamma$ sera donc encore droit; de sorte que, sauf le cas de $P\Delta=o$, il y aura une résultante unique.