ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

STEINER
GERGONNE

Géométrie pure. Théorie générale des contacts et des intersections des cercles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 285-315
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__285_0>

GÉOMÉTRIE PURE.

Théorie générale des contacts et des intersections des cercles ;

Par M. STEINER.

Extraite du Journal allemand de M. *Crelle* ;

Par M. GERGONNE.

ON a vu dans le présent recueil (tom. I , pag. 196 , 343 et 347 , tom. II , pag. 60 et 165 , et tom. X , pag. 289) à quel point est difficile le problème vulgairement appelé *Problème de Malfatti*, lequel consiste , comme l'on sait , à *inscrire à un triangle scalène donné trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux des côtés du triangle.* Son analogue dans l'espace , que nous avons proposé (tom. I , pag. 196), sans en espérer de solution , consiste à *inscrire à un tétraèdre donné quelconque quatre sphères telles que chacune d'elles touche les trois autres et trois des faces du tétraèdre ?*

En considérant que , sur un plan , les points et les droites peuvent être considérés comme des cercles d'un rayon nul ou infini, et qu'il en est de même des points et des plans dans l'espace, par rapport aux sphères , on aperçoit sur-le-champ que le premier de ces deux problèmes n'est qu'un cas très-particulier de celui où , *trois cercles étant donnés , on en demande trois nouveaux tels que chacun de ces derniers touche les deux autres et deux des cercles don-*

nés ? Problème dont l'analogue dans l'espace est le suivant : *Quatre sphères étant données, on en demande quatre nouvelles telles que chacune de ces dernières touche les trois autres et trois des sphères données ?* et l'on comprend, d'après cela, à quel point ces dernières doivent être difficiles.

Cependant M. Steiner, dans l'excellent journal publié à Berlin, par M. Crelle (II.e livraison, pag. 161), non content de donner de ces deux problèmes des solutions très-élégantes, annonce qu'il est en état de les étendre au cas où le nombre des cercles à décrire serait un quelconque des nombres de la forme $\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}$, où le nombre des sphères à décrire un quelconque des nombres de la forme $\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$; et même de résoudre les problèmes analogues pour le cas où on voudrait substituer aux conditions de contact des conditions d'intersections sous des angles donnés.

M. Steiner annonce qu'il a commencé de publier sur ce sujet un ouvrage que peut-être il aurait déjà terminé si, comme il arrive d'ordinaire aux savans qui dominent le sujet qu'ils traitent, la matière ne s'était indéfiniment étendue sous sa plume. Il se contente, dans l'endroit que nous venons de citer, d'exposer les théories élémentaires sur lesquelles repose tout son travail.

On conviendra que des théories qui permettent d'atteindre sans effort à des questions aussi éminemment difficiles doivent être considérées comme fondamentales dans la géométrie et doivent mériter, à ce titre, toute l'attention des géomètres. Ces théories ne sont pourtant autres que celle des *centres*, *axes et plans de similitude*, celles des *axes*, *plans et centres radicaux*, celle enfin des *pôles*, *polaires*, *plans polaires et polaires conjuguées*, que nous avons si souvent recommandées à l'attention de nos lecteurs, et dont on a déjà tiré si bon parti dans le présent recueil (tom. XI, pag. 1, tom. XIII, pag 193 et tom. XIV, pag. 29), mais que l'auteur a tout à la fois, étendues et simplifiées d'une manière assez notable.

Nous pensons donc faire une chose très-utile pour le progrès de la géométrie pure, et conséquemment très-agréable à nos lecteurs, en offrant ici, dans un cadre resserré, les principaux points de la doctrine de M. Steiner; mais sans toutefois le suivre servilement, et en nous permettant de nous écarter un peu de sa marche, toutes les fois que nous penserons qu'il en peut résulter quelque avantage, sous le rapport de la clarté ou de la brièveté, nous exposerons, en un mot, ces théories comme nous pensons qu'elles pourraient et devraient l'être dans les traités élémentaires, en nous rappelant toutefois que nous n'écrivons pas pour des commençans; c'est-à-dire, en négligeant, pour abréger, des développemens faciles à suppléer pour tout lecteur intelligent.

Ceux de MM. les Professeurs de nos écoles publiques qui sont dans l'usage de donner des devoirs journaliers à leurs élèves, usage qui devrait être universellement adopté, trouveront dans ce qui va suivre d'abondantes ressources pour les exercer d'une manière plus profitable qu'ils ne pourraient le faire avec la plupart des problèmes qu'on leur donne ordinairement, et dont la difficulté constitue souvent tout le mérite.

§. I.

1. Deux polygones semblables sont dits *semblablement situés* sur un même plan, lorsqu'ils y sont situés de telle sorte que leurs côtés homologues se trouvent être parallèles chacun à chacun. Il peut alors arriver que les côtés homologues des deux polygones se succèdent dans le même ordre ou bien que la succession de ces côtés soit dans l'un inverse de ce qu'elle est dans l'autre. Nous dirons, dans le premier cas, que les deux polygones sont *directement semblables* et dans le second qu'ils sont *inversement semblables*.

2. Il est aisé de démontrer que, dans l'un et dans l'autre cas, si l'on joint par des droites les sommets homologues, ou plus généralement les points homologues des deux polygones, toutes ces

droites concourront en un seul et même point, seul point homologue commun que puissent avoir les deux polygones, du moins en général. Ce point a été nommé par Monge, le *centre de similitude* des deux polygones; nous le dirons centre de *similitude directe* ou centre de *similitude inverse*, suivant que les deux polygones seront *directement* ou *inversement* semblables. Ces dénominations nous paraissent d'autant plus préférables à celles d'*externe* et d'*interne* employées jusqu'ici, qu'il peut souvent arriver que le centre de similitude qu'on dit externe soit intérieur à la fois aux deux polygones et que celui qu'on dit interne leur soit extérieur à tous deux.

3. Il est aisé de démontrer 1.° que toute droite qui passe par le centre de similitude de deux polygones semblables et semblablement situés est une droite homologue commune à ces deux polygones; 2.° que réciproquement toute droite homologue commune à deux polygones semblables et semblablement situés passe par leur centre de similitude.

A cause de cette propriété nous appellerons de telles droites des *axes de similitude* de deux polygones; ce seront des axes de *similitude directe* ou de *similitude inverse*, suivant la dénomination du centre de similitude duquels ils seront issus.

4. Soient trois polygones P, P', P'', directement semblables, tracés sur un même plan, et soient d, d', d'' respectivement les centres de similitude de P' et P'', de P'' et P, de P et P'. Si, par les deux points d' et d'', on conduit une droite D, cette droite sera (3) axe de similitude directe de P'' et P, aussi bien que de P et P'; elle sera donc aussi axe de similitude directe de P' et P'' et passera conséquemment (3) par le point d; de sorte que les trois points d, d', d'' seront sur la droite D.

Supposons, en second lieu, que P' et P'' étant toujours directement semblables, P leur soit inversement semblable à tous deux. Soient alors d, i', i'' respectivement les centres de similitude de P' et P'', de P'' et P, de P et P'. Si, par les deux points i' et i'' on conduit une droite I, cette droite sera (3) axe de similitude inverse de P'' et P, aussi bien que de P et P'; elle sera donc axe de similitude directe de P et P', et passera conséquemment (3) par le point d; de sorte que les trois points d, i', i'' seront sur la droite I. On a donc ce théorème :

5. *Les centres de similitude de trois polygones semblables et semblablement situés sur un même plan, pris successivement deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite.* Cette droite est évidemment la seule droite homologue commune que les trois polygones puissent avoir, du moins généralement parlant.

Une telle droite est ce que nous appellerons, à l'avenir l'*axe de similitude* de trois polygones. Ce sera un axe de *similitude directe*, si les trois polygones sont directement semblables. Ce sera, au contraire, un axe de *similitude inverse*, si deux des trois polygones sont directement semblables et que le troisième soit inversement semblable à l'un et à l'autre.

On voit par là qu'un axe de similitude directe passe par trois centres de similitude directe, tandis qu'un axe de similitude inverse passe par un seul centre de similitude directe et par deux centres de similitude inverse.

6. Si, en particulier, les polygones étaient réguliers, leurs centres en seraient des points homologues, lesquels devraient conséquement se trouver en ligne droite avec leur centre de similitude, dont les distances à ces deux centres seraient proportionnelles à leurs côtés et par suite proportionnelles aux rayons des cercles inscrit ou circonscrit.

7. A l'avenir lorsqu'il s'agira de deux polygones réguliers semblables et semblablement situés, nous ne réputerons côtés homologues que ceux-là seulement qui seront parallèles; et en conséquence les sommets homologues seront ceux-là seulement qui se trouveront en ligne droite avec le centre de similitude.

§. II.

8. Supposons présentement que les polygones, toujours réguliers,

soient d'un nombre pair de côtés ; comme alors chaque côté de l'un sera parallèle à la fois à deux côtés opposés de l'autre, deux pareils polygones pourront être réputés, à la fois, directement et inversement semblables ; ils auront donc, à la fois (2), un centre de similitude directe et un centre de similitude inverse, dont les distances à leurs centres seront, l'une et l'autre (6), proportionnelles aux rayons des cercles inscrit et circonscrit ; ils auront donc à la fois des axes de similitude directe et des axes de similitude inverse, et la droite qui joindra leurs centres de similitude appartiendra seule aux axes des deux sortes.

9. Que l'on conçoive ensuite trois pareils polygones tracés sur un même plan ; en les considérant tour à tour deux à deux, on leur trouvera trois centres de similitude directe et trois centres de similitude inverse, et il arrivera (4) que leurs trois centres de similitude directe appartiendront à une même ligne droite et qu'en outre chacun d'eux sera en ligne droite avec deux des centres de similitude inverse ; de telle sorte que ces six points se trouveront distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

Les trois polygones auront donc à la fois, dans ce cas, un axe de similitude directe et trois axes de similitude inverse, lesquels seront tous quatre des droites homologues communes.

§. III.

10. Deux cercles tracés sur un même plan peuvent être considérés comme deux polygones réguliers d'une infinité de côtés en nombre pair, semblablement situés sur ce plan et conséquemment (8) comme étant à la fois *directement* et *inversement* semblables, et ont, en cette qualité, deux centres de similitude, l'un de *similitude directe* et l'autre de *similitude inverse*, situés tous deux sur la droite indéfinie qui joint leurs centres, et dont les distances à ces deux centres sont respectivement proportionnelles aux rayons des deux cercles.

Deux tels cercles ont donc une infinité d'axes de similitude distribués en deux séries, savoir des *axes de similitude directe* et des *axes de similitude inverse*; et les axes de chaque série concourent tous au centre de similitude de même dénomination. La droite qui joint les centres des deux cercles, et qui contient conséquemment les deux centres de similitude, est la seule qui appartienne à la fois aux deux séries.

11. A l'avenir, lorsque nous considérerons sous ce point de vue le système de deux cercles, nous ne réputerons comme points homologues de leurs circonférences (7) que ceux pour lesquels les rayons seront parallèles; deux pareils points seront toujours en ligne droite avec l'un des centres de similitude; nous les dirons *directement* ou *inversement* homologues, suivant la dénomination de celui des deux centres de similitude avec lequel ils se trouveront en ligne droite.

12. Si, par l'un quelconque des deux centres de similitude de deux cercles, on mène une tangente à l'un de ces cercles, elle devra l'être aussi à l'autre (3); de sorte que *toute tangente commune à deux cercles coupe la droite qui joint leurs centres en un de leurs centres de similitude;* savoir, en leur centre de *similitude directe* ou en leur centre de *similitude inverse*, suivant que les deux cercles sont situés d'un *même côté* ou de *différens côtés* de la tangente.

13. Il suit de là que, *si deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, leurs tangentes communes extérieures concourront à leur centre de similitude directe, tandis que leurs tangentes communes intérieures concourront à leur centre de similitude inverse*, ce qui offre un moyen commode de mener une tangente commune à deux cercles dont les centres de similitude sont connus.

14. Donc, en particulier, *le point de contact de deux cercles qui se touchent en est un centre de similitude*; savoir, de similitude *directe* ou de similitude *inverse*, suivant que les deux cercles se ouchent intérieurement ou extérieurement.

15. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus (9) que *les centres de similitude directe de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite. En outre, chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude inverse de ces trois mêmes cercles pris aussi successivement deux à deux*; de sorte que ces six points sont distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

La première de ces droites sera ce que nous appellerons à l'avenir l'*axe de similitude directe* des trois cercles; les trois autres seront dites leurs *axes de similitude inverse*; ce sont évidemment les seules droites homologues communes que puissent avoir trois cercles tracés sur un même plan.

Ainsi, trois cercles étant représentés par C, C', C'', si d et i, d' et i', d'' et i'' représentent respectivement les centres de similitude directe et inverse de C' et C'', de C'' et C, de C et C'; les trois points d, d', d'' appartiendront à une même droite D, les trois points d, i', i'' à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I' et les trois points d'', i, i' à une même droite I''; et ces quatre droites D, I, I', I'' en sont les quatre axes de similitude.

16. Il suit de là en particulier (12) que, *lorsque trois cercles sont extérieurs les uns aux autres, les points de concours des tangentes communes extérieures à ces cercles, pris tour à tour deux à deux appartiennent tous trois à une même droite. En outre, chacun d'eux est en ligne droite avec deux des trois points de concours des tangentes communes intérieures à ces cercles, pris aussi tour à tour deux à deux.*

17. On voit aussi que, *si un cercle variable de grandeur et de situation se meut sur le plan de deux autres cercles, de grandeur et de situation fixes, les deux droites qui joindront les centres de similitude de même dénomination de ce troisième cercle avec les deux autres, mobiles comme lui, ne feront néanmoins que tourner sur le centre de similitude directe de ces deux cercles*; *tandis*

que les deux droites qui joindront les centres de similitude de dénomination différente tourneront constamment sur le centre de similitude inverse de ces deux mêmes cercles.

De là résulte un moyen de construire les centres de similitude de deux cercles auxquels on ne peut pas mener de tangentes communes, à l'aide d'un troisième cercle auxiliaire, extérieur à la fois à l'un et à l'autre. On pourra donc aussi construire, dans tous les cas, les quatre axes de similitude de trois cercles donnés.

18. Il résulte de ce que nous avons dit ci-dessus (14, 15) que *lorsque deux cercles sont touchés à la fois par un troisième cercle, les deux points de contact sont en ligne droite avec l'un des centres de similitude des deux premiers*; savoir, avec leur centre de similitude *directe*, ou avec leur centre de similitude *inverse*, suivant que le troisième cercle touche les deux premiers de la *même manière* ou d'une *manière différente*. Dans tous les cas, cette droite est un axe de similitude des trois cercles.

19 Réciproquement, si, par l'un quelconque des centres de similitude de deux cercles, on leur mène une sécante commune arbitraire, on pourra toujours assujettir un troisième cercle à la quadruple condition de toucher les deux premiers en deux des points où ils seront coupés par cette sécante commune; pourvu qu'on choisisse deux points pour lesquels les deux rayons ne soient pas parallèles; ce qui pourra être fait de deux manières différentes.

20. Bien qu'en général trois cercles tracés sur un même plan ne puissent avoir plus de quatre axes de similitude; on conçoit cependant que, si trois ou un plus grand nombre de cercles sont inscrits à la fois à un même angle ou à deux angles opposés par le sommet, toutes les droites conduites par ce sommet en seront des axes de similitude.

§. IV.

21. On sait que si, par un point situé comme on le voudra sur

le plan d'un cercle, on mène à ce cercle une sécante arbitraire; le produit des distances de ce point aux deux intersections de la sécante avec la circonférence sera une quantité constante, indépendante de la direction de cette sécante. Ce produit constant est ce que M. Steiner appelle indistinctement la *puissance d'un point par rapport* à un cercle ou la *puissance d'un cercle par rapport à un point*; et cela par analogie avec ce qu'on est convenu d'appeler *puissance de l'hyperbole.*

22. Si le point dont il s'agit est extérieur au cercle, la puissance de ce point ne sera autre chose que le quarré de la tangente menée à ce cercle par le même point. Si au contraire il lui est intérieur sa puissance sera le quarré de la moitié de la plus petite corde menée au cercle par ce point. Dans le cas particulier où le point dont il s'agit se trouverait sur la circonférence, il est clair que sa puissance serait nulle.

23. Si de ce point comme centre et avec un rayon dont le quarré soit égal à sa puissance par rapport au cercle, on décrit un autre cercle; ce dernier sera ce que M. Gaultier, de Tours, appelle le *cercle radical* du premier qui est alors appelé *primitif* par rapport à lui (*Journal de l'école polytechnique*, XVI.ᵉ cahier, pag. 124). Si le point est extérieur au cercle primitif, les deux cercles se coupent orthogonalement et peuvent être dits indistinctement primitifs ou radicaux *réciproques* l'un de l'autre. Lorsqu'au contraire le point est intérieur au cercle primitif, celui-ci est dit primitif *simple* et l'autre radical *simple.* Leur corde commune est alors à la fois un diamètre du radical et la plus petite corde qu'on puisse mener au primitif par son centre. Dans le cas particulier où le point serait situé sur la circonférence même du cercle primitif, son cercle radical se réduirait à ce point lui-même et les deux cercles pourraient indistinctement être dits primitifs ou radicaux simples ou réciproques l'un de l'autre.

24. Réciproquement 1.° si deux cercles se coupent orthogonalement, ils seront primitifs ou radicaux réciproques l'un par rapport

à l'autre et le quarré du rayon de chacun d'eux sera la puissance de son centre, par rapport à l'autre cercle ; 2.° si deux cercles se coupent de telle sorte que leur corde commune soit à la fois un diamètre de l'un et la plus petite corde menée à l'autre par son centre, le cercle qui aura cette corde commune pour diamètre sera le radical simple de l'autre, qui en sera le primitif simple, et le quarré de la moitié de cette corde sera la puissance du centre du radical par rapport au primitif.

§. V.

25. On démontre, par les élémens, que *le lieu géométrique de tous les points d'un plan tels que la différence des quarrés de leurs distances à deux points fixes de ce plan est une quantité constante, est une perpendiculaire unique et indéfinie à la droite qui joint ces deux points*; perpendiculaire dont il est d'ailleurs facile d'assigner la situation, dans chaque cas particulier, conformément aux données du problème.

D'un autre côté, il est aisé de démontrer que, si un point, à la fois extérieur ou à la fois intérieur à deux cercles, a la même puissance par rapport à ces deux cercles, la différence des quarrés des distances de ce point aux centres des deux cercles est égale à la différence des quarrés de leurs rayons et est conséquemment constante quelle que puisse être d'ailleurs la situation du point dont il s'agit sur le plan des deux cercles.

26. Donc, *le lieu géométrique de tous les points du plan de deux cercles d'égale puissance par rapport à ces deux cercles est une perpendiculaire unique et indéfinie à la droite qui joint leurs centres*, pourvu toutefois qu'on ne considère que des points à la fois extérieurs ou à la fois intérieurs aux deux cercles.

C'est cette droite, unique sur le plan de deux cercles, que M. Steiner appelle leur *ligne d'égale puissance* et que nous continuerons d'appeler, avec M. Gaultier, leur *axe radical*.

27. Lorsque l'axe radical de deux cercles les coupe, il ne saurait évidemment les couper que dans dans leurs points communs; puisqu'autrement (23) la puissance du point d'intersection serait nulle par rapport à l'un des cercles, sans l'être par rapport à l'autre. Si donc deux cercles sont entièrement intérieurs ou entièrement extérieurs l'un à l'autre, leur axe radical ne les coupera ni l'un ni l'autre; et l'on pourra de tous les points de cet axe leur mener des tangentes de même longueur.

28. Si les deux cercles se touchent, soit intérieurement soit extérieurement, leur point de contact, de puissance nulle par rapport à l'un et à l'autre (23), sera un des points de leur axe radical, qui sera ainsi leur tangente commune, de tous les points de laquelle on pourra encore conséquemment mener aux deux cercles des tangentes de même longueur.

29. Si enfin les deux cercles se coupent, leurs points d'intersection devront être, l'un et l'autre (23), des points de leur axe radical qui, de cette sorte, ne sera autre que leur corde commune, indéfiniment prolongée. Alors de tous les points de cet axe, autres que ceux de la corde commune, et conséquemment extérieurs aux deux cercles, on pourra encore leur mener des tangentes de même longueur. Quant aux points de la corde commune, intérieurs à la fois aux deux cercles, ce seront (23) les plus petites cordes menées aux deux cercles par chacun d'eux qui seront d'égale longueur.

30. Si l'on peut mener à deux cercles une tangente commune, le milieu de cette tangente sera évidemment (22) un point d'égale puissance par rapport à ces deux cercles, et conséquemment un des points de leur axe radical; d'où l'on voit que les milieux de toutes les tangentes communes que l'on peut mener à deux cercles sont sur cet axe et par conséquent en ligne droite.

31. On voit que, dans tous les cas, l'axe radical de deux cercles a une infinité de points de chacun desquels on peut leur mener quatre tangentes de même longueur. Si donc de l'un de ces points comme centre et avec la longueur commune des quatre tangentes pour

rayon, on décrit un troisième cercle, ce dernier coupera orthogonalement les deux premiers; de sorte que deux cercles tracés sur un même plan peuvent toujours être à la fois coupés orthogonalement par une infinité d'autres cercles. Il est visible que réciproquement du centre de tout cercle qui en coupe orthogonalement deux autres on peut mener à ceux-ci quatre tangentes de même longueur; d'où il suit (22) que ce centre est un des points de leur axe radical.

32. Si l'axe radical a une portion intérieure aux deux cercles et que, par l'un quelconque des points de cette portion, on leur mène, à l'un et à l'autre, les plus petites cordes qu'on puisse y faire passer, ces cordes auront même longueur et leur milieu commun en ce point, qui sera ainsi le centre d'un troisième cercle dont les quatre demi-cordes seront des rayons. Il est visible que réciproquement un cercle qui aura pour rayons les quatre demi plus petites cordes qu'on puisse mener à deux autres cercles par son centre, aura ce centre en l'un des points de leur axe radical.

33. On peut donc encore définir l'axe radical de deux cercles le lieu des centres tant des cercles qui les coupent tous deux orthogonalement que de ceux qui les coupent, de telle sorte que les cordes communes sont à la fois des diamètres du cercle coupant et les plus petites cordes qu'on puisse mener par son centre aux cercles coupés.

§. VI.

34. Soient C, C', C'', trois cercles non concentriques, tracés sur un même plan, de manière que leurs centres ne soient pas en ligne droite. Soient R, R', R'' respectivement les axes radicaux de C' et C'', C'' et C, C et C'; et soit r le point de concours de R' et R''. Ce point r sera à la fois (26) d'égale puissance par rapport à C'' et C, et d'égale puissance par rapport à C et C'; il sera donc aussi d'égale puissance par rapport à C' et C'', et sera con-

séquemment (31, 32) situé sur R; de sorte que R, R′, R″ concourront en ce point. On a donc ce théorème :

35. *Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et pris tour à tour deux à deux, concourent tous trois en un même point.* C'est ce point unique, sur le plan de trois cercles, que M. Steiner appelle leur *point d'égale puissance* et que nous appellerons, avec M. Gaultier, leur *centre radical.*

36. Lorsque le centre radical de trois cercles est extérieur à l'un d'eux, il l'est aussi aux deux autres (27); et c'est aussi le seul point de leur plan duquel on puisse leur mener à tous trois des tangentes de même longueur; c'est aussi le centre du seul cercle qui puisse les couper tous trois orthogonalement. Il n'est, dans ce cas aucun cercle qui puisse avoir pour diamètres les plus petites cordes menées à ces trois-là par son centre.

37. Si, au contraire, ce centre radical est intérieur à l'un d'eux, il le sera également aux deux autres (29). On ne pourra alors leur mener d'aucun point de leur plan des tangentes de même longueur et conséquemment aucun cercle ne pourra les couper tous trois orthogonalement; mais leur centre radical sera le centre d'un cercle dont trois diamètres seront les plus petites cordes menées aux trois autres par ce même centre.

38. Il résulte de ce qui a été dit ci-dessus (28, 29, 35) que *les tangentes ou les cordes communes à trois cercles qui se touchent ou se coupent deux à deux concourent toutes trois en un même point, centre radical des trois cercles.*

39. On voit aussi que, *si un cercle variable de grandeur et de situation, sur le plan de deux cercles de grandeur et de situation fixe, les touche ou les coupe constamment, les tangentes ou cordes communes au premier et aux deux autres, mobiles comme lui, iront néanmoins constamment concourir sur une même droite, axe radical de ces deux-là.*

De là résulte un moyen de construire l'axe radical de deux cercles entièrement intérieurs ou entièrement extérieurs l'un à l'autre à l'aide d'un troisième cercle auxiliaire qui les coupe tous deux. On pourra donc aussi construire, dans tous les cas, le centre radical de trois cercles donnés.

40. On voit enfin que, *lorsqu'un cercle en touche deux autres, les tangentes communes à celui-là et à ces deux-ci vont concourir en un point de l'axe radical de ces derniers, centre radical des trois cercles.*

41. Réciproquement, si, par un point de l'axe radical de deux cercles, extérieur à l'un et à l'autre, on mène quatre tangentes à ces deux cercles, on pourra toujours assujettir un troisième cercle à la quadruple condition de toucher les deux autres en des points de contact de ces tangentes; ce qui pourra être fait de quatre manières différentes. Deux des quatre cercles qu'on pourra ainsi décrire toucheront les deux cercles dont il s'agit de la même manière, tandis que les deux autres les toucheront d'une manière différente.

42. Bien qu'en général trois cercles tracés sur un même plan n'aient qu'un centre radical unique, on conçoit pourtant que, si trois ou un plus grand nombre de cercles passent tous par les deux mêmes points, tous les points de la droite qui joindra ces deux-là pourront être considérés comme des centres radicaux de tous ces cercles. Nous allons même voir que des cercles peuvent avoir une infinité de centres radicaux sans passer par les deux mêmes points.

§. VII.

43. Soient M et M′ deux cercles tracés sur un même plan; ils pourront toujours (31) être coupés orthogonalement par une infinité d'autres, ayant tous leurs centres sur l'axe radical des deux premiers. Soient N, N′, N″, ... une suite de ces cercles; deux quelconques N et N′ d'entre eux seront, à leur tour, coupés orthogonalement par M et M′ dont les centres se trouveront ainsi sur leur axe radical; et comme on en peut dire autant de deux quelconques des cercles de la série N, N′, N″, ... il s'ensuit que

tous ces cercles ont pour axe radical commun la droite qui joint les centres de M et M′.

Donc tout cercle M″ qui coupera orthogonalement N et N′ aura son centre en ligne droite avec ceux de M et M′, et devra conséquemment couper orthogonalement tous les cercles de la série N, N′, N″, ...; ces cercles pourront donc être tous coupés orthogonalement par une série de cercles M, M′, M″, ... ayant tous leurs centres sur leur axe radical commun; et comme ces derniers seront tous, à l'inverse, coupés orthogonalement par les cercles de la série N, N′, N″, ... ils auront pour axe radical commun la droite sur laquelle les centres de ces derniers se trouvent situés.

44. Il demeure donc établi par là qu'on peut toujours construire deux séries de cercles ayant leurs centres distribués sur deux droites perpendiculaires entre elles, dont chacune est l'axe radical commun de ceux qui ont leurs centres sur l'autre; et il est clair qu'alors chacun des cercles de chaque série sera coupé orthogonalement par tous les cercles de l'autre série. On voit en outre qu'on pourra toujours se donner à volonté deux des cercles de l'une des séries.

45. Si deux des cercles de l'une des deux séries se coupent, tous les cercles de cette série devront passer par les points d'intersection de ces deux-là et avoir ainsi une corde commune unique, puisqu'autrement (27, 28, 29) ils ne pourraient avoir un axe radical commun; mais il est aisé de voir qu'alors les cercles de l'autre série ne se couperont pas. Les tangentes menées à tous les cercles de l'une quelconque des deux séries par le centre de l'un quelconque des cercles de l'autre série seront d'égale longueur; et les points de la corde commune à tous les cercles de la première série seront les centres d'autant de cercles ayant pour diamètres les plus petites cordes qu'on puisse mener par ces différens points aux cercles de la seconde série.

On peut citer comme un des exemples les plus familiers de ces deux séries de cercles, les méridiens et les parallèles, dans la projection stéréographique dite de Ptolémée ou de Mercator.

45. Dans le cas particulier où deux des cercles de l'une des séries seraient tangens l'un à l'autre, tous les cercles de cette série se toucheraient en leur point de contact ; et il en serait de même de tous les cercles de l'autre série ; de sorte que le lieu des centres des cercles de chaque série serait une tangente commune aux cercles de l'autre série.

46. Dans le cas général, deux quelconques des cercles de la série M, M′, M″, ... ayant pour axe radical la ligne des centres des cercles de la série N, N′, N″, ..., il faut en conclure (38) que les cordes communes à l'un quelconque des cercles de cette dernière série et à tous les cercles de la série M, M′, M″, ... concourent en un même point de la ligne des centres de N, N′, N″, ... Par une semblable raison, les cordes communes à l'un quelconque des cercles de la série M, M′, M″, ... et à tous les cercles de la série N, N′, N″, ... doivent toutes concourir en un même point de la ligne des centres des cercles de la première de ces deux séries.

§. VIII.

47. Soient un cercle C et une droite indéfinie P, situés comme on voudra dans un même plan. Imaginons une série d'angles circonscrits au cercle, ayant tous leurs sommets s, s', s'', ... sur la droite P ; ces sommets seront aussi les centres d'une suite de cercles S, S′, S″, ... coupant tous orthogonalement le cercle C et ayant conséquemment pour axe radical commun la perpendiculaire à P conduite par le centre de C. Les cordes de contact de ces angles circonscrits ne seront donc autre chose que les cordes communes à C et aux cercles S, S′, S″, .. ; donc (45) toutes ces cordes devront concourir en un même point p de la perpendiculaire à P conduite par le centre de C. On a donc ce théorème.

48. *Lorsque des angles circonscrits à un même cercle ont leurs sommets sur une même droite, leurs cordes de contact concourent*

toutes en un même point; et il est aisé de voir que, réciproquement, *lorsque les cordes de contact d'une suite d'angles circonscrits à un même cercle concourent en un même point, les sommets de ces angles appartiennent tous à une même droite.*

49. Lorsqu'un point et une droite ont une semblable relation, par rapport à un cercle, le point est dit le *pôle* de la droite qui est dite, à son tour, la *polaire* de ce point. On voit par là qu'une tangente à un cercle et son point de contact sont polaires et pôle l'un de l'autre, par rapport à ce cercle.

50. Soient s le sommet d'un angle circonscrit à un cercle dont c soit le centre; soient p et q les deux extrémités de la corde de contact et m son milieu qui se trouvera sur cs. On pourra considérer p et q comme les sommets de deux angles circonscrits, égaux l'un et l'autre à deux angles droits, se confondant, ainsi que leurs cordes de contact, avec les tangentes ps et qs; d'où il suit (48) que le point s est le pôle de la droite pq.

Par le point s soit menée une parallèle à pq, laquelle sera comme elle perpendiculaire à cs; son pôle devra se trouver sur pq, mais, comme ce pôle doit aussi être sur cs, il se trouvera à l'intersection m de ces deux droites.

51. Ainsi, *lorsqu'un angle est circonscrit à un cercle, son sommet est le pôle de la corde de contact dont le milieu est, à l'inverse, le pôle de sa parallèle conduite par ce sommet.*

Ce théorème offre tout ce qui est nécessaire pour construire, dans tous les cas, le pôle d'une droite donnée ou la polaire d'un point donné.

52. Soient A et B deux droites se coupant en c; soient a et b leurs pôles respectifs et C la droite qui joint ces pôles. 1.° Si le point c est extérieur au cercle, la corde de contact de l'angle circonscrit qui y aura son sommet et qui en sera la polaire (51), devra (48) contenir les deux points a et b, et ne sera conséquemment autre chose que la droite C elle-même.

2.° Si le point c est intérieur au cercle, auquel cas les droites A et B seront deux cordes, les points *a* et *b* seront (51) les sommets de deux angles circonscrits dont ces cordes seront les cordes de contact; d'où il suit (48) que la droite C, qui joint *a* et *b*, sera la polaire du point *c*.

53. Ainsi, *le point d'intersection de deux droites est le pôle de la droite qui joint leurs pôles*; et réciproquement *la droite qui joint deux points est la polaire de l'intersection des polaires de ces deux points*.

54. On peut encore dire (48) que *la polaire de tout point d'une droite passe par le pôle de cette droite*, et que réciproquement, *le pôle de toute droite qui passe par un point est sur la polaire de ce point.*

55. On voit enfin (52) que, *si plusieurs droites concourent en un même point, leurs pôles appartiendront tous à une même droite*; et que réciproquement, *si plusieurs points appartiennent à une même droite, leurs polaires concourront toutes en un même point.*

56. Il est manifeste que *les pôles des lignes homologues de deux cercles en sont des points homologues*, et que réciproquement *les polaires de leurs points homologues en sont des lignes homologues.*

57. Le centre de similitude de deux cercles a, par rapport à ces deux cercles, des polaires perpendiculaires à la droite qui joint leurs centres, et qui, suivant la précédente remarque, sont des lignes homologues de ces cercles. Ces droites ont été appelées les *polaires de similitude* de deux cercles. Elles sont dites polaires de *similitude directe* ou de *similitude inverse*, suivant la dénomination des centres de similitude dont elles sont les polaires.

Si deux cercles sont désignés par C et C′, nous désignerons respectivement par d'' et i'' leurs centres de similitude directe et inverse, par $P_{d''}$ et $P'_{d''}$ leurs polaires de similitude directe, et par $P_{i''}$ et $P'_{i''}$ leurs polaires de similitude inverse.

Lorsque les deux cercles seront désignés par C′ et C″, nous désignerons respectivement leurs centres de similitude directe et inverse par d et i, leurs polaires de similitude directe par P'_d et P''_d, et leurs polaires de similitude inverse par $P'_{d'}$ et $P''_{d'}$.

Et lorsqu'enfin les deux cercles seront désignés par C'' et C, nous désignerons respectivement leurs centres de similitude directe et inverse par d' et i', leurs polaires de similitude directe par $P''_{d'}$ et $P_{d'}$ et leurs polaires de similitude inverse par $P''_{i'}$ et $P_{i'}$.

58. Soient présentement C, C', C'' trois cercles tracés sur un même, plan on sait (15) qu'ils ont pris tour-à-tour deux à deux, six centres de similitude, trois d, d', d'' de similitude directe et trois i, i', i'' de similitude inverse. On sait de plus que les trois points d, d', d'' appartiennent à une même droite D, que les trois points d, i', i'' appartiennent à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I′ et enfin les trois points d'', i, i' à une même droite I″.

Désignons respectivement par p_d, p'_d, p''_d les pôles de D par rapport à C, C', C'', par p_i, p'_i, p''_i, par $p_{i'}$, $p'_{i'}$, $p''_{i'}$, par $p_{i''}$, $p'_{i''}$, $p''_{i''}$ les pôles respectifs, par rapport aux mêmes cercles, de I, I′, I″.

Il y aura ainsi (53) quatre pôles relatifs à chaque cercle, savoir :

pour C :
- p_d, intersection des polaires $P_{d'}$, $P_{d''}$,
- p_i, intersection des polaires $P_{i'}$, $P_{i''}$,
- $p_{i'}$, intersection des polaires $P_{d'}$, $P_{i''}$,
- $p_{i''}$, intersection des polaires $P_{i'}$, $P_{d''}$;

pour C' :
- p'_d, intersection des polaires $P'_{d''}$, P'_d,
- p'_i, intersection des polaires $P'_{i''}$, P'_i,
- $p'_{i'}$, intersection des polaires $P'_{d''}$, P'_i,
- $p'_{i''}$, intersection des polaires $P'_{i''}$, P'_d,

pour C'' $\left\{\begin{array}{lll} p''_{d}\,, & \text{intersection des polaires} & P''_{d}\,,\ P''_{i''}\,, \\ p''_{i''}\,, & \text{intersection des polaires} & P''_{i}\,,\ P''_{i''}\,, \\ p''_{i}\,, & \text{intersection des polaires} & P''_{d}\,,\ P''_{i'}\,, \\ p''_{i'}\,, & \text{intersection des polaires} & P''_{i}\,,\ P''_{d}\,. \end{array}\right.$

Et, comme les quatre droites D, I, I$'$, I$''$ sont (15) des droites homologues communes aux trois cercles C, C$'$, C$''$, il s'ensuit que

$$\left.\begin{array}{l} p_{d}\,,\ p'_{d}\,,\ p''_{d} \\ p_{i}\,,\ p'_{i}\,,\ p''_{i} \\ p_{i'}\,,\ p'_{i'}\,,\ p''_{i'} \\ p_{i''}\,,\ p'_{i''}\,,\ p''_{i''} \end{array}\right\} \text{en seront des points homologues;}$$

et voilà pourquoi on les a appelés des *pôles de similitude.*

§. IX.

59. Soient C, C$'$ deux cercles tracés sur un même plan, et soit O un troisième cercle qui les touche tous deux en t et t', respectivement.

Supposons, en premier lieu, que ce troisième cercle touche les deux autres de la même manière, c'est-à-dire, qu'il les touche tous deux extérieurement, ou bien les enveloppe tous deux ou enfin en est lui-même enveloppé; alors les points de contact t et t' seront (18), avec le centre d'' de similitude directe de C et C$'$, sur une même droite, axe de similitude des trois cercles.

Soient c, c', o les pôles respectifs de cet axe de similitude, par rapport à C, C$'$, O, ces pôles en seront des points homologues (56), d'où il suit que des droites parallèles, de direction quelconque, menées par ces trois points seront des lignes homologues des trois mêmes cercles, puisque passant par des points homologues, elles feront des angles égaux avec la ligne homologue commune tt'. Il en sera donc ainsi, en particulier, à l'égard des perpendiculaires conduites par ces trois points à la droite qui joint les centres de C et C'. Désignons respectivement ces perpendiculaires par cc, $c'c'$, oo.

D'abord (51) le point o étant le point de concours des tangentes menées à O par t et t', il s'ensuit (40) que ce point o est un point de l'axe radical de C et C', et qu'ainsi la droite oo n'est autre chose que cet axe radical lui-même, que nous avons désigné ci-dessus par R''.

Ensuite le point c étant, par rapport à C, le pôle de tt' qui passe par d''; il s'ensuit que la polaire de ce dernier point, relativement au même cercle, devra (54) passer par c; et comme elle doit d'ailleurs être perpendiculaire à la droite qui joint les centres de C et C', il s'ensuit qu'elle ne sera autre chose que la droite cc elle-même. On prouvera, par un semblable raisonnement, que $c'c'$ est également la polaire du point d'', par rapport au cercle C'. De sorte que cc et $c'c'$ sont les polaires de similitude directe de C et C', désignés ci-dessus par $P_{d''}$ et $P'_{d''}$.

Supposons, en second lieu, que le cercle O touche les cercles C et C' d'une manière différente, c'est-à-dire, qu'il touche l'un d'eux extérieurement, tandis qu'il enveloppe l'autre ou en est enveloppé; alors (18) les points de contact t et t' seront en ligne droite avec le centre de similitude inverse i'' des deux cercles C et C'. Soient encore c, c', o les pôles respectifs de cette droite par rapport à ces trois cercles, et soient menées par ces trois pôles les perpendiculaires cc, $c'c'$, oo à la droite qui joint leurs centres. On prouvera, comme ci-dessus, que oo est encore l'axe radical R'' des deux cercles C et C'; mais ici cc et $c'c'$ deviendront les polaires de similitude inverse $P_{i''}$ et $P'_{i''}$ des deux mêmes cercles. On a donc ce théorème dû à M. Durrande :

60. *L'axe radical de deux cercles est situé, par rapport à tout cercle qui les touche tous deux, de la même manière que le sont par rapport à ces deux cercles, leurs polaires de similitude de même dénomination;* savoir, leurs polaires de similitude *directe* ou leurs polaires de similitude *inverse*, suivant que le troisième cercle touche les deux autres de la *même manière* ou d'une *manière différente.*

61. Il résulte de là, en particulier, que *l'axe radical de deux cercles est semblablement situé soit par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux de la même manière, soit par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux d'une manière différente;* d'où il suit encore que *le centre de similitude de deux cercles qui en touchent deux autres est situé sur l'axe radical de ceux-ci;* savoir, leur centre de similitude *directe* ou leur centre de similitude *inverse*, suivant que les deux premiers cercles touchent les deux autres de la *même manière* ou d'une *manière différente.*

62. Soient présentement trois cercles C, C′, C″ touchés à la fois par un même cercle O; et supposons d'abord que ce dernier touche les trois autres de la même manière.

Parce que O touche C et C′ de la même manière, leur axe radical R″ sera situé par rapport à O (60) de la même manière que la polaire de similitude directe $P_{d''}$ le sera par rapport à C; et parce que O touche aussi C et C″ de la même manière, leur axe radical R′ sera situé par rapport à O de la même manière que le sera la polaire de similitude directe $P_{d'}$ par rapport à C; donc le centre radical r, intersection des deux droites R″ et R′, sera situé par rapport à O de la même manière que le sera par rapport à C l'intersection p_d de leurs homologues $P_{d'}$ et $P_{d''}$. On prouvera de la même manière que p'_d et p''_d sont respectivement situés par rapport à C′ et C″, comme r se trouve l'être par rapport à O; de sorte que p_d, p'_d, p''_d et r sont des points respectivement homologues de C, C′, C″ et O.

Supposons, en second lieu, que le cercle O touchant toujours

C' et C'' de la même manière, touche C d'une manière différente; alors, ce cercle O touchant C et C' d'une manière différente, leur axe radical R'' sera situé (60) par rapport à O comme la polaire de similitude inverse $P_{i''}$ le sera par rapport à C. Par une semblable raison, l'axe radical R' sera situé par rapport à O comme le sera par rapport à C la polaire de similitude inverse $P_{i'}$; donc le centre radical r, intersection de R'' et R' sera situé, par rapport à O, comme le sera par rapport à C le pôle de similitude p_i, intersection de leurs homologues $P_{i'}$ et $P_{i''}$. On prouvera de la même manière que p'_i et p''_i sont aussi situés par rapport à C' et C'' respectivement, comme r se trouve l'être par rapport à O. De sorte que p_i, p'_i, p''_i et r seront des points homologues respectifs de C, C', C'' et O.

Si C'' et C étaient les deux seuls cercles qui dussent être touchés de la même manière par O, ce seraient $p_{i'}$, $p'_{i'}$, $p''_{i'}$ et r qui seraient des points homologues respectifs de C, C', C'' et O; et si les cercles qui doivent tous être touchés de la même manière par O étaient C et C', ce seraient $p_{i''}$, $p'_{i''}$, $p''_{i''}$ et r qui seraient des points homologues respectifs de C, C', C'' et O. On a donc ce théorème.

63. *Le centre radical de trois cercles est situé par rapport à un cercle qui les touche tous trois de la même manière que le sont, par rapport à ces trois cercles les pôles de l'un de leurs axes de similitude, pris respectivement par rapport à ces mêmes cercles*; savoir, les pôles de leur axe de similitude *directe*, si le quatrième cercle touche les trois autres de la *même manière*, et les pôles de l'un de leurs axes de similitude *inverse*, si ce quatrième cercle touche deux de ceux-là de la *même manière* et le troisième d'une *manière différente;* auquel cas il faudra choisir celui des trois axes de similitude inverse qui contient le centre de similitude directe de deux cercles qui doivent être touchés de la même manière par le quatrième.

64. Si l'on considère présentement que, lorsque deux figures sem-

blables sont semblablement situées (7), les droites qui joignent leurs points homologues en sont des lignes homologues qui (3) doivent passer par leur centre de similitude, et que (14) le point de contact de deux cercles qui se touchent en est un centre de similitude, on conclura de là le théorème que voici :

65. *Les droites qui joignent le centre radical de trois cercles aux pôles de l'un de leurs axes de similitude, relatifs à ces trois cercles, les coupent respectivement à leurs points de contact avec un quatrième cercle qui les touche tous trois*; savoir, à leurs points de contact avec un cercle qui les touche tous trois de la *même manière*, si l'axe de similitude dont il s'agit est un de leur axe de similitude *directe*, et à leurs points de contact avec un cercle qui touche deux d'entre eux de la *même manière*, et le troisième d'une *manière différente*, si au contraire l'axe de similitude dont il s'agit est un des axes de similitude *inverse*; et alors les deux cercles touchés de la même manière sont ceux qui ont leur centre de similitude directe sur cet axe.

On résoudra facilement, d'après cela, le problème suivant :

66. *PROBLÈME. Décrire un cercle qui en touche trois autres donnés sur un même plan?*

Solution. Comme on sait faire passer une circonférence par trois points donnés, tout se réduit évidemment à construire les points de contact du cercle cherché avec le cercle donné.

Veut-on que le cercle cherché touche les trois cercles donnés de la même manière, on joindra leur centre radical aux pôles de leur axe de similitude directe, pris par rapport à ces trois cercles, par des droites, dont les intersections, respectives avec eux, détermineront leurs points de contact avec le cercle cherché.

Veut-on, au contraire, que le cercle cherché touche deux des cercles donnés de la même manière et le troisième d'une manière différente, il s'agira uniquement de substituer, dans la construction, à l'axe de similitude directe, celui des trois axes de similitude inverse qui contiendra le centre de similitude directe des deux cercles qui devront être touchés de la même manière par le cercle cherché.

Chaque construction donnera six points de contact, relatifs à deux cercles qui résoudront le problème; mais on parviendra aisément à distinguer les trois points de contact relatifs à un même cercle, en observant que les droites qui les joignent aux centres des cercles auxquels ils appartiennent respectivement, doivent concourir en un même point, centre du cercle cherché.

Tout amour propre d'auteur à part, cette construction, que nous avons donnée pour la première fois il y a plus de douze ans (*Mémoires de Turin* pour 1814), nous paraît de beaucoup préférable à toutes celles qu'antérieurement et postérieurement on a données du même problème.

§. X.

67. Considérons de nouveau deux cercles C, C′ touchés à la fois en t et t' par un troisième cercle O, et dont les points de contact sont en ligne droite avec le centre de similitude directe d'' ou le centre de similitude inverse i'' des deux cercles C et C′, suivant que le cercle O les touche de la même manière ou d'une manière différente.

Soient menées les tangentes communes en t et t' aux deux cercles C et C′ et au cercle O et soit o leur point de concours, situé sur l'axe radical de C et C′. De ce point comme centre et avec un rayon $ot=ot'$ soit décrit un quatrième cercle Ω; ce cercle coupera orthogonalement les deux premiers en t et t'; d'où il suit (44) que la longueur, soit de la tangente soit de la plus petite corde menée au cercle Ω par le point d'' ou par le point i'', en ligne droite avec t et t', sera constante, quelle que soit la situation du cercle O, pourvu seulement qu'il touche les deux autres C et C′; mais le quarré de cette tangente ou de la moitié de cette plus petite corde est égal au produit $d''t.d''t'$, ou au produit $i''t.i''t'$, suivant que c'est le point d'' ou le point i'' qui est en ligne droite avec les deux points t et t'; donc ce produit est aussi constant quel que soit le cercle tangent O. On a donc ce théorème (41):

68. *Si, par l'un des centres de similitude de deux cercles, on mène à ces deux cercles une sécante commune arbitraire, le produit des distances de ce centre aux intersections de la sécante avec les deux cercles sera constant, quelle que soit la direction de cette sécante*, pourvu que l'on choisisse ces points d'intersection de telle sorte que les rayons correspondans ne soient pas parallèles.

Ce produit constant est ce que M. Steiner appelle la *commune puissance* de deux cercles. Nous la dirons *directe* ou *inverse*, suivant la dénomination du centre de similitude auquel elle sera relative.

69. La droite tt' corde commune aux deux cercles O et Ω, en est aussi l'axe radical; puis donc que cette corde contient l'un des deux points d'' et i'', il s'ensuit que les tangentes ou les plus petites cordes menées par ce point d'' ou i'' aux deux cercles O et Ω sont de même longueur; puis donc qu'elles sont d'une longueur constante pour le cercle Ω, elles le seront également pour le cercle O; c'est-à-dire, en d'autres termes, que ce point d'' ou i'' en sera le centre radical commun;

Donc, si de ce point d'' ou i'' comme centre, et avec un rayon dont le quarré soit égal à la commune puissance des deux cercles C et C$'$, on décrit un troisième cercle, ce cercle coupera orthogonalement tous les cercles qui toucheront à la fois les deux cercles C et C$'$, pourvu qu'ils les touchent de la *même manière* ou d'une *manière différente*, suivant que la commune puissance dont il s'agira sera *directe* ou *inverse*.

70. Les deux cercles qui ont ainsi pour centres les centres de similitude de deux cercles donnés et dont les quarrés des rayons sont les communes puissances respectives de ces deux cercles, par rapport à ces deux points, cercles déjà considérés par M. Gaultier, sont ce que M. Steiner appelle les *cercles de commune puissance* de ces

deux-là; chacun d'eux est dit *direct* ou *inverse*, suivant la dénomination de son centre.

§. XI.

71. Soient C, C′, C″ trois cercles non concentriques, tracés sur un même plan, et dont nous supposons les centres n'être pas en ligne droite. Soient respectivement d et i, d' et i', d'' et i'' les centres de similitude directe et inverse de C′ et C″, C″ et C, C et C′. On sait (15) que les trois points d, d', d'' appartiendront à une même droite D, les trois points d, i', i'' à une même droite I, les trois points d', i'', i à une même droite I′ et les trois points d'', i, i' à une même droite I″. Soient enfin Δ et Υ, Δ′ et Υ′, Δ″ et Υ″ les cercles de commune puissance directe et inverse de C′ et C″, C″ et C, C et C′.

Soit un cercle O touchant de la même manière les trois cercles C, C′, C″; ce cercle devra (69) être coupé orthogonalement par les trois cercles Δ, Δ′, Δ″; il les coupera donc lui-même orthogonalement; et conséquemment (43) ces derniers auront un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude directe D des trois cercles C, C′, C″ et contenant le centre de O.

Supposons au contraire que O, touchant encore C′ et C″ de la même manière, touche C d'une manière différente; alors ce cercle devra (69) être coupé orthogonalement par les trois cercles Δ, Υ′, Υ″; il les coupera donc lui-même orthogonalement; et conséquemment (43) ces derniers auront un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I des trois cercles C, C′, C″ et contenant le centre de O.

On prouvera d'une manière semblable que les trois cercles Δ′, Υ″, Υ ont un axe radical commun, perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I′, contenant les centres des cercles qui touchent C″ et C de la même manière et C′ d'une manière différente; et que les trois cercles Δ″, Υ, Υ′ ont aussi un axe radical commun perpendiculaire à l'axe de similitude inverse I″, contenant les centres des cercles qui touchent C et C′ de la même manière et C″ d'une manière différente. On a donc ce théorème :

72. *Les cercles de commune puissance directe de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, ont tous trois un même axe radical; et chacun d'eux a un même axe radical avec deux des cercles de commune puissance inverse de ces trois mêmes cercles, pris aussi successivement deux à deux*; de manière que les six cercles de communes puissances de trois cercles donnés n'ont en tout que quatre axes radicaux, dont chacun appartient à trois d'entre eux.

Nous appellerons désormais ces quatre axes les *axes de commune puissance* de trois cercles donnés ; celui qui appartient aux trois cercles de commune puissance directe sera l'axe de commune puissance *directe*; les trois autres seront les axes de commune puissance *inverse*.

73. Remarquons présentement que le cercle unique (37 et 38) radical commun des trois cercles donnés C, C′, C″, doit être aussi coupé orthogonalement (67), tout comme le cercle qui les touche tous trois, par leurs cercles de commune puissance, d'où il suit que son centre, centre radical des trois cercles C, C′, C″ doit se trouver à la fois sur les divers axes de commune puissance qui, de cette sorte, concourent tous quatre en ce point. De là résulte (71) ce théorème dû à M. Gaultier:

74. *Les centres des huit cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sont distribués, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de ces trois cercles sur les directions de leurs quatre axes de similitude.* La perpendiculaire sur l'axe de similitude *directe* contient les centres des deux cercles qui touchent de la même manière les trois cercles donnés. Chacune des autres contient les centres des deux cercles qui, touchant de la même manière les deux cercles dont le centre de similitude directe est

sur l'axe de similitude correspondant, touchent l'autre cercle d'une manière différente.

P. S. Monge a démontré, dans son *Application de l'analyse à la géométrie*, que toute surface du second ordre pouvait être engendrée de deux manières différentes par un cercle variable de rayon dont le centre parcourt une droite et dont le plan demeure constamment parallèle à lui-même; d'où il a conclu que, par chacun des points d'une surface du second ordre, on peut toujours tracer deux cercles qui y soient entièrement situés; proposition qui a été admise sans contestation par tous les géomètres français.

Cependant, à la page 50 de la première livraison du Journal de M. Crelle, M. Steiner croit devoir signaler, comme faisant exception à cette loi, le paraboloïde hyperbolique, les cylindres hyperbolique et parabolique et le système de deux plans; et l'exception qu'il signale a été accueillie par MM. les Rédacteurs du *Bulletin universel* de M. le B.on de Ferussac, dans leur numéro de janvier 1827, page 3. Si elle était fondée, il faudrait aussi y comprendre le cône et le cylindre droit et généralement toutes les surfaces de révolution du second ordre autres que la sphère, par chacun des points desquelles on ne peut tracer qu'un cercle unique qui y soit entièrement contenu. Il faudrait également excepter les sommets des cônes et les pôles des surfaces de révolution, par lesquels on ne saurait conduire aucun plan qui y détermine des sections circulaires.

Mais de telles exceptions sont-elles recevables? Nous ne le pensons pas. Monge, en énonçant son théorème, les avait sans doute aperçues tout aussi bien que nous; mais il n'a point aussi assigné de limites ni aux rayons des deux sections circulaires que l'on peut obtenir dans une surface du second ordre par chacun de ses points, ni à l'angle des plans des deux sections; d'où il résulte, à ce qu'il nous paraît, que ce serait mal entendre ce théorème, que ce serait lui ôter une partie de la généralité qui en fait le principal mérite que de ne pas admettre que ces grandeurs, comme toutes les grandeurs variables, peuvent, dans certains cas particuliers, devenir nulles, infinies ou indéterminées, ou, en d'autres termes, que les deux cercles peuvent dégénérer en des points ou des droites, qu'ils peuvent se confondre en un seul, ou qu'enfin ils peuvent être en nombre infini pour chaque point, comme il arrive dans la sphère. Or, le théorème ainsi entendu ne saurait souffrir aucune sorte d'exception.

On doit être d'autant plus surpris que M. Steiner ne l'ait pas entendu dans ce sens que précisément un des principaux avantages de ses belles constructions, pour les problèmes de contact, est de se plier sans effort aux cas où tous ou partie des cercles ou des sphères donnés deviennent des points, des droites ou des plans.

Nous n'ignorons pas qu'il est des géomètres qui ne souffrent qu'avec une sorte d'impatience qu'on se permette de considérer la ligne droite comme une portion de circonférence d'un rayon infini, et cela peut-être uniquement parce que les anciens n'ont pas usé de cette liberté; mais n'est-ce pas précisément à cette manière plus large d'envisager l'étendue géométrique que les modernes sont en partie redevables de leur supériorité dans la géométrie pure? Supériorité que les mêmes géométres pourront bien aussi leur contester; mais qui n'en demeurera pas moins un fait patent pour qui ne voudra pas se refuser à l'évidence.