ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Solution d'un cas particulier du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 277-282
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__277_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution d'un cas particulier du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 du présent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Problème. *Si un angle droit se meut sur le plan d'une ligne du second ordre, de manière que ses côtés soient constamment normaux à la courbe ; quelle courbe décrira son sommet ?*

Solution. Soient d'abord la courbe une ellipse donnée par l'équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ .$$

Soit (t,u) le sommet de l'angle droit mobile. L'équation d'une droite conduite par ce sommet sera de la forme

$$y-u=M(x-t)\ ;$$

Si cette droite est normale à l'ellipse au point (x',y'), on devra avoir, à la fois, les trois équations

$$M=\frac{y'-u}{x'-t}\ ,\quad M=\frac{a^2y'}{b^2x'}\ ,\quad b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2$$

on tire des deux premières

$$x'=\frac{a^2(tM-u)}{(a^2-b^2)M}\,, \qquad y'=\frac{b^2(tM-u)M}{(a^2-b^2)M}\;;$$

valeurs qui, substituées dans la troisième, donnent, toutes réductions faites,

$$b^2t^2M^4-2b^2tuM^3+\{a^2t^2+b^2u^2-(a^2-b^2)^2\}M^2-2a^2tuM+a^2u^2=0\;;$$

Dans cette équation, l'inconnue est, comme l'on voit, la tangente tabulaire de l'angle que fait avec l'axe des x la normale menée à l'ellipse par le point (t,u). Elle est du quatrième degré parce que, généralement parlant, on peut mener quatre tangentes à une ellipse par un même point de son plan.

Soient M, M', M'', M''' les quatre racines de cette équation, on devra avoir

$$M+M'+M''+M'''=(M+M')+(M''+M''')=2\,\frac{u}{t}\,,$$

$$MM'+MM''+M'M''+MM'''+M'M'''+M''M'''=(M+M')(M''+M''')$$

$$+MM'+M''M'''=\frac{a^2t^2+b^2u^2-(a^2-b^2)^2}{b^2+t^2}\,,$$

$$MM'M''+MM'M'''+MM''M'''+M'M''M'''=MM'(M''+M''')$$

$$+M''M'''(M+M')=2\,\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\,,$$

$$MM'M''M'''=MM'.M''M'''=\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\,.$$

Mais il faut que deux des quatre normales soient perpendiculaires l'une à l'autre. Supposons que ce soient celles qui répondent aux tangentes tabulaires M'', M''' ; on devra avoir alors $M''M'''=-1$, ce qui changera les quatre équations ci-dessus dans les suivantes :

$$(M+M')+(M''+M''')=2\,\frac{u}{t}\ ,$$

$$(M+M')(M''+M''')+MM'=\frac{a^2t^2+b^2(t^2+u^2)-(a^2-b^2)^2}{b^2t^2}\ ,$$

$$MM'(M''+M''')-(M+M')=2\,\frac{a^2u}{b^2t}\ ,$$

$$MM'=-\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\ .$$

Substituant dans la seconde et dans la troisième les valeurs de $M''+M'''$ et de MM', tirées de la première et de la quatrième, on aura

$$(M+M')^2-2\,\frac{u}{t}\,(M+M')+\frac{(a^2+b^2)(t^2+u^2)-(a^2-b^2)^2}{b^2t^2}=0\ .$$

$$\frac{a^2u^2-b^2t^2}{b^2t^2}(M+M')-2\,\frac{a^2u^2}{b^2t^2}\cdot\frac{t^2+u^2}{t^2}=0\ .$$

Substituant enfin, dans la première de ces deux-ci, la valeur de $M+M'$, donnée par l'autre, on obtiendra, pour l'équation en t et u du lieu cherché du sommet de l'angle droit mobile dont les côtés sont constamment normaux à l'ellipse,

$$(a^2+b^2)(t^2+u^2)(a^2u^2+b^2t^2)^2-(a^2-b^2)^2(a^2u^2-b^2t^2)^2=0\ ; \qquad (1)$$

équation du sixième degré.

Pour passer de là à l'équation polaire, il faudra faire

$$t=r\text{Cos.}\theta\ , \qquad u=r\text{Sin.}\theta\ ,$$

ce qui donnera, en substituant

$$r=\pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Sin.}^2\theta-b^2\text{Cos.}^2\theta}{a^2\text{Sin.}^2\theta+b^2\text{Cos.}^2\theta}=\pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Tang.}^2\theta-b^2}{a^2\text{Tang.}^2\theta+b^2}\ .$$

L'équation mise sous cette forme, on voit aisément 1.° que le centre de l'ellipse est un point quadruple de la courbe, puisqu'avant de tirer la valeur de r, tout était divisible par r^4; 2.° que les diamètres conjugués égaux sont tangens à la courbe, puisqu'à $r=0$ répond $\text{Tang.}\theta=\pm\frac{b}{a}$; 3.° que la courbe rencontre les axes de l'ellipse en des points pour lesquels on a $r=\pm\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, puisqu'on obtient également ces valeurs, soit qu'on fasse $\theta=0$ ou bien $\theta=90°$. Par une discussion ultérieure, on se convaincra que cette courbe est formée de quatre espaces fermés en forme de feuilles, inscrits dans les angles des diamètres conjugués égaux et formant une sorte de double lemniscate.

Si, dans l'équation polaire, on change b^2 en $-b^2$, on aura, pour l'équation de la courbe relative à l'hyperbole,

$$r=\pm\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^2\text{Tang.}^2\theta+b^2}{a^2\text{Tang.}^2\theta-b^2}\ .$$

Comme on aura toujours un facteur t^4, commun à tous les termes de l'équation, le centre de l'hyperbole sera encore, comme celui de l'ellipse, un point quadruple : mais ce point sera tout-à-fait isolé. Quant au surplus de la courbe, on voit 1.° qu'elle est imaginaire lorsqu'on a $a>b$ c'est-à-dire, quand l'angle des asymptotes est obtus ; 2.° que cette courbe est infiniment éloignée, lorsque l'hyperbole est équilatère ; 3.° enfin que, lorsque l'angle des coordonnées est aigu, elle se compose de quatre parties ayant chacune deux branches infinies, inscrites dans les angles des asymptotes, qui leur sont communes avec l'hyperbole, et coupant ses axes en des points dont les distances à l'origine sont $\pm\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Quant à la parabole, en prenant pour son équation

$$y^2=4cx\ ,$$

et en prenant encore pour l'équation de la normale menée par le point (t,u)

$$y-u=M(x-t)$$

on devra avoir

$$M=\frac{y-u}{x-t}\ ,\qquad M=-\frac{y}{2c}\ ;$$

ces deux équations donneront

$$x=\frac{(t-2c)M-u}{M}\ ,\qquad y=-2cM\ .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la parabole, elle deviendra

$$c^2M^3-c(t-2c)M+cu=0\ .$$

En représentant par M, M', M'' les trois racines de cette équation, on aura

$$M+M'+M''=M+(M'+M'')=0\ ,$$

$$MM'+MM''+M'M''=M(M'+M'')+M'M''=\frac{2c-t}{c}\,,$$

$$MM'M''=M.M'M''=-\frac{u}{c}\,.$$

Or, il faudra encore poser ici, comme ci-dessus $M'M''=-1$, au moyen de quoi ces trois équations deviendront

$$M+(M'+M'')=0\,,\quad M(M'+M'')=\frac{3c-t}{c}\,,\quad M=\frac{u}{c}\,.$$

En substituant dans les deux premières la valeur de M donnée par la dernière, on aura

$$M'+M''=-\frac{u}{c}\,,\qquad M'+M''=\frac{3c-t}{u}\,;$$

égalant enfin ces deux valeurs, on obtiendra pour l'équation en t et u du sommet de l'angle droit mobile

$$u^2=c(t-3c)\,;$$

ce lieu est donc une parabole de même axe que la première, mais d'un paramètre quatre fois moindre. La distance de son sommet au sommet de la première est triple de la distance du sommet de celle-ci à son foyer.

On aurait pu, au surplus, déduire ce résultat de l'équation (1), en y changeant d'abord t en $t-a$, pour amener l'origine au sommet négatif du grand axe, changeant ensuite b^2 en $\frac{ap}{2}$, développant, réduisant et supposant enfin a infini.