FERRIOT

Questions résolues. Démonstration du théorème de combinaison énoncé à la page 32 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 137-140
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__137_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de combinaison énoncé à la page 32 du précédent volume;

Par M. Ferriot, Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

A la page 40 du XV.e volume du présent recueil, on a demandé de combien de manières m couleurs, toutes différentes les unes des autres, pouvaient être appliquées sur les m faces d'un polyèdre régulier; m représentant, tour à tour, les nombres 4, 6, 8, 12, 20. A la page 32 du volume suivant, on a annoncé que ce nombre était

$$\frac{1.2.3.4.....(m-2)(m-1)}{2n}, \qquad (1)$$

n exprimant le nombre des côtés de chacune des faces du polyèdre; et c'est cette formule que nous nous proposons ici de vérifier.

Remarquons bien d'abord qu'il n'est pas question de résoudre le problème pour le cas où, les faces du polyèdre étant numérotées, on regarderait comme solutions différentes celles même qui ne différeraient uniquement entre elles que par les numéros des faces où les mêmes couleurs se trouveraient appliquées. A nos yeux donc deux polyèdres égaux seront réputés colorés de la même manière, lorsqu'on pourra les superposer de telle sorte que les mêmes couleurs coïncident partout.

Observons, en second lieu, que, s'il était question d'appliquer m couleurs différentes aux m sommets d'un polygone ouvert, plan ou gauche, de $m-1$ côtés, on le pourrait d'un nombre de manières exprimé par

$$1.2.3\,4\ldots(m-2)(m-1)m\;. \qquad (2)$$

Observons enfin que, s'il s'agit d'appliquer quatre couleurs différentes sur les quatre faces d'un tétraèdre, on le pourra de deux manières seulement; puisque après avoir appliqué une couleur quelconque sur une de ses faces, on pourra appliquer les trois restantes sur les trois autres dans deux sens différens. Or, comme la formule (1) se réduit à l'unité seulement, lorsqu'on y suppose $m=4$ et $n=3$, nous sommes fondés à soupçonner que le coefficient 2 de son dénominateur doit être supprimé. Reste maintenant à la vérifier pour les quatre autres polyèdres réguliers, qui ont tous cette propriété commune d'avoir leurs faces opposées deux à deux.

Soit posé un quelconque de ces polyèdres par une de ses faces, prise pour *base inférieure*, sur un plan horizontal, et faisons-le tourner sur cette base, jusqu'à ce que l'un des côtés de la *base supérieure* soit tout-à-fait tourné vers nous et dirigé conséquemment de notre gauche à notre droite. Il y aura conséquemment une des faces adjacente à cette base supérieure qui sera aussi tournée vers nous.

Soit joint le centre de la base supérieur à celui de cette face par une droite, puis le centre de cette face à celui de sa voisine à droite par une autre droite, et ainsi de suite du centre d'une face à celui d'une autre face adjacente, en allant constamment vers la droite, sans revenir deux fois sur la même face, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au centre de la base inférieure. On formera ainsi un polygone gauche ouvert du genre des spirales ayant m sommets et par suite $m-1$ côtés.

Imaginons qu'ayant réparti les noms des couleurs entre tous les sommets du polygone d'une manière quelconque, on applique ensuite à chacune des faces du polyèdre la couleur qu'indique son centre, on obtiendra ainsi un des polyèdres colorés dont on demande le nombre. Si on répète l'opération autant de fois qu'il y a de manières de répartir les m couleurs entre les m sommets du polygone gauche, on obtiendra ainsi des polyèdres colorés, en nombre exprimé par la formule (2), lesquels seront tous du genre de ceux dont nous cherchons le nombre.

Or je dis, en premier lieu, qu'on n'en aura omis d'aucune sorte; car supposons qu'on nous en présente un duquel on prétende qu'il ne se trouve pas parmi ceux que nous avons formés; posons-le sur une quelconque de ses faces comme base inférieure; tournons-le sur cette base jusqu'à ce qu'un côté de sa base supérieure soit complètement tourné vers nous; et construisons le polygone gauche ouvert suivant le procédé indiqué ci-dessus; il se trouvera une certaine couleur à chacun de ses sommets; et si, comme on le suppose, l'arrangement des couleurs y était nouveau, il s'ensuivrait, contrairement à l'hypothèse, que, dans l'exécution de notre procédé, nous n'aurions pas épuisé tous les arrangemens possibles.

Non seulement nous n'aurons point fait d'omissions, mais chaque sorte de polyèdre aura été exécuté plusieurs fois; et il s'agit, en second lieu, de savoir combien de fois chaque sorte de polyèdre aura été répétée.

Or, qu'on nous donne un quelconque de ces polyèdres colorés, qu'on le pose tour-à-tour sur chacune de ses m faces comme base inférieure, et que, pour chaque base inférieure, on le fasse tourner, de manière à amener tour-à-tour devant soi chacun des n côtés de sa base supérieure; on lui aura ainsi donné mn situations différentes, pour chacune desquelles on pourra construire le polygone gauche comme il a été dit ci-dessus. Or, il est clair que, dans chaque cas, on aura aux sommets de ce polygone une des combinaisons des couleurs qu'on avait faite d'abord, puisqu'on les avait toutes faites. Ainsi un seul polyèdre coloré doit se trouver mn fois parmi ceux que nous avons enseigné à faire. La formule (2) donne donc mn fois chacun de ces polyèdres; et conséquemment on obtiendra le nombre des polyèdres demandé par la question en divisant cette formule (1) par mn, ce qui donnera

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(m-2)(m-1)}{n}\,, \qquad (3)$$

comme nous l'avions d'abord soupçonné. La formule (1) n'est donc point exacte (*).

(*) Il est probable que l'analyse suivie par l'auteur de cette formule, qui nous l'a adressée sans démonstration, lui aura laissé échapper le cas où, sur deux polyèdres égaux, les couleurs se succèdent entre elles dans le même ordre, mais en sens inverse.

J. D. G.