ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM
VECTEN
QUERRET

Démonstration des quatre théorèmes sur l'hyperbole énoncés à la page 268 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 100-104
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__100_1>

Démonstration des quatre théorèmes sur l'hyperbole énoncés à la page 268 du précédent volume ;

Par MM. Ch. Sturm, Vecten et Querret.

THÉORÈME I. *Les sécantes menées de l'un quelconque des points d'une hyperbole à deux points fixes pris sur la courbe interceptent toujours, sur l'une ou sur l'autre asymptote, des longueurs cons-*

tantes et égales à la longueur interceptée sur la même asymptote entre la sécante menée par les deux points fixes et la tangente à l'un d'eux.

Démonstration. Soient M, M' (fig. 14) deux points fixes pris sur la courbe, et Z un autre point arbitraire de la même courbe. Soient menées les sécantes ZM, ZM' et MM', rencontrant respectivement l'une des asymptotes en X, X' et A et l'autre en Y, Y' et B. Soit encore menée, par l'un quelconque M des deux points fixes, une tangente à la courbe, coupant la première asymptote en D et la seconde en E; tout se réduit à démontrer que $XX'=DA$, quel que soit le point Z.

Pour cela, menons, par les points M, M' et Z, des parallèles à la première asymptote, rencontrant respectivement la seconde en H, H' et U, et des parallèles à la seconde, rencontrant respectivement la première en G, G' et T; et soit O le centre de la courbe.

Par une propriété très-connue de l'hyperbole, on aura $ZY=MX$, $ZY'=M'X'$, $MB=M'A$, $MD=ME$, d'où il suit que les triangles ZYU, $ZY'U$, MBH et MEH, déjà respectivement semblables aux triangles XMG, $X'M'G'$, $AM'G'$ et DMG leur seront, en outre, respectivement égaux; de sorte qu'on aura

$$OT=UZ=GX=G'X'\,, \qquad OG=HM=G'A=GD\,.$$

On aura, en conséquence,

$$XX'=OX'-OX=(OG'+G'X')-(OG+GX)=OG'-OG=GG'\,,$$

$$DA=OA-OD=(OG'+G'A)-(OG+GD)=OG'-OG=GG'\,;$$

donc, en effet, $XX'=DA$; et par conséquent XX' est constant, quelle que soit la situation du point Z sur la courbe.

M. Vecten observe que ce théorème n'est, pour ainsi dire, qu'un renversement du problème résolu analitiquement par M. C. G., à la page 26 du précédent volume ; aussi, est-ce , en effet, en cherchant à résoudre ce même problème par des considérations purement géométriques que M. Sturm y est parvenu. M. Vecten remarque encore que M. Brianchon , dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre* (art. LXVII), a fait voir comment, au moyen de la propriété de l'hexagone inscrit à une section conique , on pouvait démontrer la première partie du théorème ; mais il s'est contenté d'énoncer la seconde , qui en est en effet une conséquence nécessaire.

THÉORÈME II. Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou de l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence manifeste du précédent. Il en résulte, en effet, que la partie d'une asymptote comprise entre la corde et la tangente à l'une de ses extrémités doit être égale à la portion de la même asymptote comprise entre cette même corde et la tangente à son autre extrémité.

M. Vecten remarque que ce théorème fait le sujet de l'art. LXVIII de l'ouvrage déjà cité de M. Brianchon, où il l'énonce comme une conséquence de l'art. LXVII ; mais qu'il peut être aussi directement démontré par des considérations analogues à celles qui conduisent à la démonstration du premier, sans le faire dépendre de celui-ci.

THÉORÈME III. Si, sur une corde d'une hyperbole, considérée comme diagonale , on construit un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux deux asymptotes de la courbe ; l'autre diagonale de ce parallélogramme , prolongée s'il est nécessaire, passera par le centre de cette courbe.

Démonstration. Soit MM' (fig. 15) une corde d'une hyperbole sur laquelle, comme diagonale , soit construit le parallélogramme $MN'M'N$, dont les côtés opposés soient respectivement parallèles aux deux asymptotes de la courbe , dont nous supposons le centre en O. Soient G , G' les points où les directions des côtés opposés MN, N'M' rencontrent l'asymptote qui ne leur est pas parallèle ; et soient H , H' les points où les deux autres côtés N'M , M'N rencontrent l'autre asymptote. Par une propriété connue de l'hyperbole, on aura

$$\mathrm{MH}\times\mathrm{MG}=\mathrm{M'H'}\times\mathrm{M'G'} ;$$

ou bien

$$\mathrm{OG}\times\mathrm{N'G'}=\mathrm{OG'}\times\mathrm{NG} ,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{N'G'}}{\mathrm{NG}}=\frac{\mathrm{OG'}}{\mathrm{OG}} ,$$

ce qui prouve que les trois point N , N' , O sont en ligne droite.

M. Sturm , à qui on doit aussi ce théorème , observe qu'on en peut déduire la solution du problème où *étant donnés trois points d'une hyperbole et des parallèles à ses deux asymptotes , on demande de construire le centre de la courbe , et par suite ces asymptotes elles-mêmes ?*

Ayant, en effet , trois points de la courbe et des parallèles aux deux asymptotes , on a , par là même , deux cordes sur lesquelles , comme diagonales , on peut construire des parallélogrammes de la nature de celui dont il vient d'être question ci-dessus ; et , comme les secondes diagonales de ces parallélogrammes doivent (*Théorème III*) passer par le centre de la courbe , ce centre se trouvera déterminé par leur intersection.

Les deux cordes qui joignent un des points donnés sur la courbe aux deux autres peuvent être choisies de trois manières différentes ; mais , comme le problème est évidemment déterminé , quel que soit le choix qu'on en fera, on trouvera toujours le même centre. C'est cette considération qui a conduit M. Sturm au quatrième théorème qui se trouve ainsi suffisamment démontré par ce qui précède , et qu'il nous suffira conséquemment d'énoncer.

THÉORÈME IV. Si , sur les trois côtés d'un triangle , pris tour à tour comme diagonales , on construit des parallélogrammes , dont *les côtés soient parallèles à deux droites données, les trois autres diagonales de ces parallélogrammes concourront en un même point, lequel sera le centre d'une hyperbole qui, étant circonscrite au triangle, aurait ses asymptotes parallèles aux deux droites données.*

Ce théorème appartient, au surplus, à la géométrie élémentaire, et peut être facilement démontré, sans rien emprunter à la géométrie des courbes, comme l'ont fait voir MM. Querret et Vecten.