ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Addition à l'article inséré à la page 286 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 390-391
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__390_0>

Addition à l'article inséré à la page 286 du présent volume ;

Par M. CH. STURM.

EN démontrant, à la page 286 du présent volume, le théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 (*), j'ai négligé de faire remarquer qu'on pouvait facilement passer de là à la démonstration d'un théorème connu (**), sur lequel M. Durrande est revenu de nouveau à la page 54 de ce volume, et qu'il a heureusement étendu au triangle sphérique et au tétraèdre. Voici de quoi il s'agit :

On a vu, à l'endroit cité, qu'en représentant par α, β, γ les trois angles d'un triangle, par r le rayon du cercle circonscrit, par D la distance d'un point quelconque P au centre de ce cercle, et enfin par k^2 l'aire du triangle qui a ses sommets aux pieds des perpendiculaires abaissées de ce point P sur les directions des côtés du triangle proposé, on avait (pag. 289)

$$D^2=r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}.\beta\,\text{Sin}.\gamma}\,;$$

(*) Ce théorème appartient à M. Sturm.

(**) Voyez *Annales*, tom. I, pag. 64 et 149, tom. III, pag. 346.

J. D. G.

Supposons que l'on prenne pour ce point P le centre du cercle inscrit à notre triangle ; alors les trois perpendiculaires a, b, c seront égales entre elles et au rayon de ce cercle ; en représentant donc ce rayon par r', les équations (1) et (2), pag. 287, deviendront

$$r'(\text{Sin.}\alpha+\text{Sin.}\beta+\text{Sin.}\gamma)=2r\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma\,,$$

$$r'^2(\text{Sin.}\alpha+\text{Sin.}\beta+\text{Sin.}\gamma)=2k^2\;;$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{2k^2}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma}=2rr'\;;$$

en substituant donc cette valeur dans celle de D^2, elle deviendra

$$D^2=r^2-2rr'=r(r-2r')\,,$$

c'est-à-dire, *la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.* C'est le théorème auquel nous nous étions proposé de parvenir.

Paris, le 20 mars 1824.