ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Démonstration du théorème de M. Hamett, mentionné à la page 334 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 374-375
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__374_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du théorème de M. Hamett, *mentionné à la page* 334 *du présent volume ;*

Par M. B. D. C.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient élevées à CA et CB aux points A et B et du côté opposé à AB des perpendiculaires AP et BQ respectivement égales à AC et BC. Soient menées AQ et BP et soit de plus abaissée du point C sur AB la perpendiculaire CC′. Il s'agit de démontrer que ces trois dernières droites se coupent en un même point.

Pour cela, soient élevées à AB, par ses deux extrémités A et B, et du côté opposé à C des perpendiculaires AD et BE, de même longueur qu'elle ; et soient menées CD et CE. Soient menées respectivement à ces deux droites, par les points A et B, des parallèles concourant en F et soient joints DE et CF. Les deux triangles DCE et AFB ayant, par construction, un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, auront aussi leurs deux autres côtés égaux, chacun à chacun. Les figures DF et EF seront donc des parallélogrammes dont AC et BC seront des diagonales respectives. Nous aurons de plus, à cause des parallèles,

$$Ang.C'CD = Ang.CDA\ ,$$

$$Ang.\mathrm{ACF}=Ang.\mathrm{CAD}\ ,$$

d'où nous conclurons

$$Ang.\mathrm{C'CD}+Ang.\mathrm{ACF}=Ang.\mathrm{CDA}+Ang.\mathrm{CAD}\ .$$

Ajoutant donc, de part et d'autre l'angle DCA, nous aurons, d'une part, la somme des trois angles du triangle ACD, et de l'autre la somme des trois angles C'CD, DCA et ACF, laquelle conséquemment vaudra, comme elle, deux angles droits; d'où nous pouvons conclure que CF n'est autre chose que le prolongement de CC'.

Cela posé, il est connu que les triangles CAD et CBE sont respectivement égaux aux triangles PAB et QBA; et comme deux côtés de chacun des premiers sont respectivement perpendiculaires à leurs homologues dans les derniers, il s'ensuit que les côtés CD et CE des premiers doivent aussi être perpendiculaires aux côtés PB et QA des derniers; donc leurs parallèles AF et BF seront aussi respectivement perpendiculaires à PB et QA.

Les trois droites AQ, FC', BP ne sont donc ainsi que les perpendiculaires abaissées des trois sommets du triangle AFB sur les directions des côtés respectivement opposés, et doivent conséquemment, par les théories connues, se couper au même point.