
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

F. SARRUS

**Analise transcendante. Recherches sur les conditions
d'intégrabilité des fonctions différentielles**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 197-205

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__197_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles ;

Par M. F. SARRUS, docteur ès sciences.

LA recherche des conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles, recherche qui a principalement occupé Euler et Condorcet, constitue une des branches les plus importantes de la haute analyse. La méthode des variations conduit très-simplement à ces conditions ; mais, outre que l'emploi de cette méthode, dans des recherches de calcul intégral proprement dit, peut sembler indirecte, elle n'offre aucune ressource pour remonter de la différentielle à son intégrale, lorsque les conditions d'intégrabilité se trouvent remplies.

Euler et Condorcet ont bien prouvé, par leur analyse, que les conditions qu'ils avaient obtenues sont *nécessaires* ; mais Lexell paraît être le premier qui ait tenté de démontrer (*) , sans rien emprunter d'étranger au calcul intégral, que ces conditions sont aussi *suffisantes* ; c'est-à-dire qu'elles entraînent d'elles-mêmes la possibilité d'intégrer ; ce qui est le point important dans cette théorie. Malheureusement, comme l'observe Lagrange (*Leçons sur les fonctions*, leçon xxi), la démonstration de Lexell est si compliquée, qu'il est difficile de juger de sa justesse et de sa généralité.

(*) Voyez le tome XV des *Novi Commentarii* de Petersbourg.

En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru que les procédés du calcul différentiel, proprement dit, pouvaient, à eux seuls, conduire d'une manière assez simple aux conditions d'intégrabilité et à la démonstration de l'importante proposition de Lexell; et c'est à le faire voir que nous destinons ce petit essai.

Dans tout ce qui va suivre, x et y seront des fonctions quelconques d'une troisième variable dont nous prenons la différentielle pour unité, et de tant de constantes qu'on voudra. Nous représenterons respectivement, pour abréger,

$$dx, \quad d^2x, \quad d^3x, \dots \quad \text{par} \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots$$

$$dy, \quad d^2y, \quad d^3y, \dots \quad \text{par} \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots$$

P_1, P_2, P_3, \dots , seront des fonctions quelconques de

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1},$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1},$$

dont les différentielles seront respectivement p, p_1, p_2, \dots

Cela posé, on a identiquement

$$p = \frac{dP}{dx} x_1 + \frac{dP}{dx_1} x_2 + \frac{dP}{dx_2} x_3 + \dots + \frac{dP}{dx_{m-1}},$$

$$+ \frac{dP}{dy} y_1 + \frac{dP}{dy_1} y_2 + \frac{dP}{dy_2} y_3 + \dots + \frac{dP}{dy_{n-1}} y_n,$$

et, par suite,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = d \frac{dP}{dx} , \\ \frac{dp}{dx_1} = d \frac{dP}{dx_1} + \frac{dP}{dx} , \\ \frac{dp}{dx_2} = d \frac{dP}{dx_2} + \frac{dP}{dx_1} , \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp}{dx_{m-1}} = d \frac{dP}{dx_{m-1}} + \frac{dP}{dx_{m-2}} , \\ \frac{dp}{dx_m} = \frac{dP}{dx_{m-1}} . \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dp}{dy} = d \frac{dP}{dy} , \\ \frac{dp}{dy_1} = d \frac{dP}{dy_1} + \frac{dP}{dy} , \\ \frac{dp}{dy_2} = d \frac{dP}{dy_2} + \frac{dP}{dy_1} , \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp}{dy_{n-1}} = d \frac{dP}{dy_{n-1}} + \frac{dP}{dy_{n-2}} , \\ \frac{dp}{dy_n} = \frac{dP}{dy_{n-1}} . \end{array} \right\} (2)$$

Du premier de ces deux systèmes d'équations on déduit, par l'élimination successive des différentielles de $\frac{dP}{dx_{m-1}}$, $\frac{dP}{dx_{m-2}}$, ..., $\frac{dP}{dx_1}$, $\frac{dP}{dx}$,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP}{dx_{m-1}} = \frac{dp}{dx_m} , \\ \frac{dP}{dx_{m-2}} = \frac{dp}{dx_{m-1}} - d \frac{dp}{dx_m} , \\ \frac{dP}{dx_{m-3}} = \frac{dp}{dx_{m-2}} - d \frac{dp}{dx_{m-1}} + d^2 \frac{dp}{dx_m} , \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dP}{dx_1} = \frac{dp}{dx_2} - d \frac{dp}{dx_1} + d^2 \frac{dp}{dx_2} - \dots \dots \dots \mp d^{m-1} \frac{dp}{dx_m} , \\ 0 = \frac{dp}{dx} - d \frac{dp}{dx_1} - d^2 \frac{dp}{dx_2} - \dots \dots \dots \mp d^{m-1} \frac{dp}{dx_{m-1}} \pm d^m \frac{dp}{dx_m} . \end{array} \right\} (3)$$

La dernière de ces équations est une équation de condition à laquelle doit satisfaire la différentielle p de la fonction P .

Les équations (2), traitées exactement de la même manière, donnent

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dy_{n-1}} &= \frac{dp}{dy_n}, \\
 \frac{dP}{dy_{n-2}} &= \frac{dp}{dy_{n-1}} - d \frac{dp}{dy_n}, \\
 \frac{dP}{dy_{n-3}} &= \frac{dp}{dy_{n-2}} - d \frac{dp}{dy_{n-1}} + d^2 \frac{dp}{dy_n}, \\
 &\dots \\
 \frac{dP}{dy} &= \frac{dp}{dy_1} - d \frac{dp}{dy_2} + d^2 \frac{dp}{dy_3} - \dots - d^{n-1} \frac{dp}{dy_n}, \\
 0 &= \frac{dp}{dy} - d \frac{dp}{dy_1} + d^2 \frac{dp}{dy_2} - \dots - d^{n-1} \frac{dp}{dy_{n-1}} + d^n \frac{dp}{dy_n}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Equations dont la dernière est une nouvelle équation de condition à laquelle doit encore satisfaire la différentielle p de la fonction P .

Avant d'aller plus loin, remarquons que, si P est une fonction de

$$x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{m-1},$$

$$y, y_1, y_2, \dots, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{n-1},$$

seulement, c'est-à-dire, si cette fonction ne contient aucune des quantités

$$x, x_1, x_2, \dots, x_{i-1},$$

auquel cas on aura

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dP}{dx_1} = 0, \quad \frac{dP}{dx_2} = 0, \dots, \frac{dP}{dx_{i-1}} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dx_1} = 0, \quad \frac{dp}{dx_2} = 0, \dots, \frac{dp}{dx_{i-1}} = 0;$$

l'application du même procédé nous conduira aux résultats

$$d \frac{dP}{dx_i} = \frac{dp}{dx_i}, \quad (5)$$

$$0 = \frac{dp}{dx_i} - d \frac{dp}{dx_{i+1}} + d^2 \frac{dp}{dx_{i+2}} - \dots \pm d^{m-i} \frac{dp}{dx_m}. \quad (6)$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite de ces recherches.

Lorsqu'on se sera assuré que p est une différentielle exacte, les équations (3) et (4) offriront le moyen le plus simple pour remonter à son intégrale P , par les quadratures seulement. Mais il nous reste à démontrer présentement que toute fonction différentielle qui satisfait identiquement aux dernières équations (3) et (4) est nécessairement par là même une différentielle exacte.

Premièrement, soit u_i une fonction quelconque de

$$x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m, y, y_1, y_2, \dots, y_n,$$

assujettie à la seule condition de satisfaire à l'équation

$$A_i = \frac{du_i}{dx_i} - d \frac{du_i}{dx_{i+1}} + d^2 \frac{du_i}{dx_{i+2}} - \dots \pm d^{m-i} \frac{du_i}{dx_m} \quad (7)$$

dans laquelle A_i est une quantité constante quelconque.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{du_i}{dx_i} = A_i + d \left\{ \frac{du_i}{dx_{i+1}} - d \frac{du_i}{dx_{i+2}} + d^2 \frac{du_i}{dx_{i+3}} - \dots \pm d^{m-i-1} \frac{du_i}{dx_m} \right\};$$

d'où l'on conclura que, comme le premier membre ne renferme pas de différentielles de x et y d'un ordre plus élevé que x_m, y_n , la partie du second membre comprise entre les crochets ne saurait renfermer de différentielles des mêmes variables d'un ordre supérieur à x_{m+1}, y_{n+1} ; et que, par conséquent, il est possible de trouver une fonction P_i de $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}, y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dP_i}{dx_i} = \frac{du_i}{dx_{i+1}} - d \frac{du_i}{dx_{i+2}} + d^2 \frac{du_i}{dx_{i+3}} - \dots \pm d^{m-i-1} \frac{du_i}{dx_m},$$

au moyen de laquelle nous aurons, en ayant égard à l'équation (5),

$$\frac{du_i}{dx_i} = A_i + d \frac{dP_i}{dx_i} = A_i + \frac{dp_i}{dx_i},$$

et par suite

$$u_i = A_i x_i + p_i + u_{i+1}, \quad (8)$$

en désignant par u_i , une fonction de $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m, y, y_1, y_2, \dots, y_n$, qu'il faudra déterminer d'une manière convenable.

Substituant cette valeur de u_i dans l'équation (7) et observant, équation (6), que, puisque p_i est une différentielle exacte, on doit avoir identiquement,

$$0 = \frac{dp_i}{dx_i} - d \frac{dp_i}{dx_{i+1}} + d^2 \frac{dp_i}{dx_{i+2}} - \dots \pm d_{m-i} \frac{dp_i}{dx_m},$$

nous trouverons, réductions faites,

$$0 = d \frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}} - d^2 \frac{du_{i+1}}{dx_{i+2}} + d^3 \frac{du_{i+1}}{dx_{i+3}} - \dots \pm d^{m-i} \frac{du_{i+1}}{dx_m},$$

ou, en intégrant,

$$A_{i+1} = \frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}} - d \frac{du_{i+1}}{dx_{i+2}} + d^2 \frac{du_{i+1}}{dx_{i+3}} - \dots \pm d^{m-i-1} \frac{du_{i+1}}{dx_m};$$

ce qui fait voir que u_{i+1} est entièrement de même nature que u_i .

Cela posé, si u est une fonction de $x, x_1, x_2, \dots, x_m, y, y_1, y_2, \dots, y_n$, qui satisfasse à la condition

$$0 = \frac{du}{dx} - d \frac{du}{dx_1} + d^2 \frac{du}{dx_2} - \dots \pm d^m \frac{du}{dx_m},$$

nous en tirerons, par des opérations analogues à celles qui viennent de nous conduire à l'équation (8)

$$u = p + u_1,$$

$$u_1 = A_1 x_1 + p_1 + u_2,$$

$$u_2 = A_2 x_2 + p_2 + u_3,$$

$$u_3 = A_3 x_3 + p_3 + u_4,$$

.....

$$u_{m-1} = A_{m-1} x_{m-1} + p_{m-1} + u_m,$$

$$u_m = A_m x_m + p_m + Y;$$

Y étant, dans la dernière, une fonction de y, y_1, y_2, \dots, y_n seulement.

En ajoutant ces diverses équations, et faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} q = & A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \dots + A_m x_m \\ & + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m, \end{aligned}$$

nous trouverons enfin

$$u = q + Y, \quad (9)$$

dans laquelle q est évidemment une différentielle exacte, puisque chacun des termes dont cette fonction se compose est une semblable différentielle.

Si u ne renfermait ni y ni ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, la fonction que nous avons représentée par Y serait constante et par conséquent nulle, sans quoi u serait composée de termes hétérogènes, ce qui ne peut jamais avoir lieu, ainsi u serait alors *une différentielle exacte*.

Si, au contraire, u renfermait y et ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, mais qu'elle rendît identique l'équation

$$0 = \frac{du}{dy} - d \frac{du}{dy_1} + d^2 \frac{du}{dy_2} - \dots \dots \pm d^n \frac{du}{dy_n},$$

la fonction Y pourrait ne pas être nulle ; mais, en substituant dans cette équation la valeur de u que nous venons de donner, et observant que, puisque q est une différentielle exacte, l'on a

$$0 = \frac{dq}{dy} - d \frac{dq}{dy_1} + d^2 \frac{dq}{dy_2} - \dots \dots \pm d^n \frac{dq}{dy_n},$$

nous trouverions, réductions faites,

$$0 = \frac{dY}{dy} - d \frac{dY}{dy_1} + d^2 \frac{dY}{dy_2} - \dots \dots \pm d^n \frac{dY}{dy_n};$$

et de là on conclut, comme ci-dessus, que, puisque Y ne renferme que y et ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, cette fonction Y est nécessairement une différentielle exacte, de sorte que, dans ce cas comme dans le précédent, u est encore *une différentielle exacte*.

Pour simplifier la question, nous avons supposé que toutes ces fonctions ne renfermaient que deux variables x et y et leurs dérivées ;

rivées ; mais il est facile de voir qu'elle ne se compliquerait pas beaucoup , si l'on voulait considérer une fonction d'un plus grand nombre de variables , et que de plus , les conclusions seraient absolument les mêmes.
