A. L. BOYER
CH. STURM

Solution partielle du problème de géométrie énoncé à la page 288 du XIIe volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 314-318
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__314_0>

Solution partielle du problème de géométrie énoncé à la page 288 du XII^e volume du présent recueil ;

Par MM. A. L. BOYER et CH. STURM.

PROBLÈME. *Déterminer, en fonction des quatre côtés d'un quadrilatère rectiligne inscrit au cercle, 1.° l'angle de deux côtés opposés ; 2.° l'angle des deux diagonales ?*

Solution. Soient, comme dans le mémoire de la page 269 du XII^e volume, a, b, c, d les quatre côtés consécutifs du quadrilatère, et x, y les deux diagonales ; la première se terminant aux sommets $(a,\ b)$, $(c,\ d)$, et la seconde aux sommets (b,c), $(a,\ d)$; on aura, comme alors,

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\,, \qquad y^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ad+bc}\,;$$

en outre, en posant

$$b+c+d-a=A\,,$$

$$c+d+a-b=B\,,$$

$$d+a+b-c=C\,,$$

$$a+b+c-d=D\,;$$

nous aurons

$$\text{Sin.}(a,\ d)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)}\,, \qquad \text{Sin.}(a,\ b)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ab+cd)}\,;$$

$$\text{Cos.}(a,d)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \qquad \text{Cos.}(a,b)=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Mais les prolongemens des côtés opposés b et d forment avec le côté a un triangle dans lequel l'angle opposé à ce côté a est precisément l'angle cherché (b, d) de deux côtés opposés ; en supposant donc, pour fixer les idées, $a>c$, nous aurons

$$(b,\ d)=\varpi-[(a,\ d)+(a,\ b)]$$

d'où

$$\text{Sin.}(b,\ d)=\text{Sin.}[(a,\ d)+(a,\ b)]=\text{Sin.}(a,\ d)\text{Cos.}(a,\ b)+\text{Sin.}(a,\ b)\text{Cos.}(a,\ d)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\text{Sin.}(b,\ d)=\frac{[(a^2+b^2-c^2-d^2)+(a^2+d^2-b^2-c^2)]\sqrt{ABCD}}{4(ad+bc)(ab+cd)},$$

ou, en réduisant

$$\text{Sin.}(b,\ d)=\frac{(a^2-c^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)};$$

tel est le sinus de l'angle des deux côtés opposés b *et* d ; on trouverait de même

$$\text{Sin.}(a,\ c)=\frac{(b^2-d^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)}.$$

Si l'on cherche les cosinus des mêmes angles, on trouvera

$$\text{Cos.}(b,\ d)=\text{Sin.}(a,\ b)\text{Sin.}(a,\ d)-\text{Cos.}(a,\ b)\text{Cos}\ (a,\ d)$$

ou, en substituant,

$$\text{Cos.}(b,\ d)=\frac{ABCD-(a^2+d^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)(ad+bc)}$$

ou, en développant et réduisant

$$\text{Cos.}(b\,,\,d)=\frac{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2-(a^2-c^2)^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\;;$$

et on trouvera de même

$$\text{Cos.}(a\,,\,c)=\frac{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2-(b^2-d^2)^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\;;$$

De là on déduit

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(b\,,\,d)=1-\text{Cos.}(b\,,\,d)=\frac{(a^2-c^2)^2-[(ab+cd)-(ad+bc)]^2}{2(ab+cd)(ad+bc)}\;,$$

ou, en décomposant, divisant par 2 et extrayant la racine quarrée

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b\,,\,d)=\frac{a-c}{2}\sqrt{\frac{BD}{(ab+cd)(ad+bc)}}\;;$$

et on aurait de même

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,c)=\frac{b-d}{2}\sqrt{\frac{AC}{(ab+cd)(ad+bc)}}\;;$$

et, comme on a

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,d)=\frac{\text{Sin.}(b\,,\,d)}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b,\,d)}\;,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,c)=\frac{\text{Sin.}\,(a\,,\,c)}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,(a\,,c)}$$

il viendra, en substituant,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,d)=\frac{a+c}{2}\sqrt{\frac{AC}{(ab+cd)(ad+bc)}}\;,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,c)=\frac{b+d}{2}\sqrt{\frac{BD}{(ab+cd)(ad+bc)}}\;;$$

et de là encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b\,,d)=\frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{BD}{AC}}\ ;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a\,,c)=\frac{b-d}{b+d}\sqrt{\frac{AC}{BD}}\ ;$$

formules très-commodes pour le calcul par logarithmes.

Passons à la recherche de l'angle des diagonales ; pour cela remarquons que ces diagonales divisent le quadrilatère en quatre triangles dont la somme des aires sera, en appelant x' et x'' les deux segmens de x, et y' et y'' les deux segmens de y,

$$\tfrac{1}{2}(x'y'+x'y''+x''y'+x''y'')\text{Sin.}(x\,,y)=\tfrac{1}{2}(x'+x'')(y'+y'')\text{Sin.}(x\,,y)=\tfrac{1}{2}xy\text{Sin.}(x\,,y)\,;$$

mais il a été prouvé, dans le mémoire cité que l'aire de ce quadrilatère a aussi pour expression

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{ABCD}\,;$$

donc

$$\text{Sin.}(x\,,y)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2xy}\ ;$$

mais on a

$$xy=ac+bd\ ;$$

donc finalement

$$\text{Sin.}(x\,,y)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(ac+bd)}\ .$$

De là on conclura facilement

$$\text{Cos.}(x\,,y)=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}\ ;$$

et ensuite

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=1-\text{Cos.}(x\,,\,y)=\frac{AC}{2(ac+bd)}\,,$$

$$2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(x\,,y)=1+\text{Cos.}(x\,,\,y)=\frac{BD}{2(ac+bd)}\,;$$

d'où

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{AC}{ac+bd}}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{BD}{ac+bd}}\,;$$

et, par suite

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(x\,,\,y)=\sqrt{\frac{AC}{BD}}\,;$$

formule très-commode pour le calcul par logarithmes. (*)

(*) Nous rappellerons ici qu'il a été proposé de trouver des formules analogues pour le quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle de la sphère. De telles formules ont bien été reçues ; mais elles n'ont pas l'élégance suffisante pour en justifier la publication.

J. D. G.