ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Analise transcendante. Note à l'appui d'une réflexion de M. Plana, dans l'article inséré à la page 145 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 365-366
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__365_1>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note à l'appui d'une réflexion de M. Plana, dans l'article inséré à la page 145 de ce volume;

Par un Abonné.

En parlant des résultats qu'on obtient en prenant l'intégrale qui exprime l'aire d'une courbe au-delà de ses limites physiques et réelles, M. Plana s'exprime ainsi (pag. 148) : « Plusieurs exemples » démontrent que, en pareil cas, il suffit de supprimer la partie » imaginaire du résultat ainsi trouvé, pour obtenir l'intégrale arith- » métique ; mais je n'ose croire qu'un tel moyen puisse, dans tous » les cas, être employé avec sureté ».

Il est aisé de justifier, par un exemple, le scrupule que manifeste M. Plana en cet endroit. Soit considérée, en effet, une lemniscate dont l'équation polaire soit

$$r^2 = a^2\text{Cos}.2\theta\ ,$$

laquelle ne donne des valeurs réelles pour le rayon vecteur r qu'autant que l'angle θ n'excède pas $45°$. Puisqu'en général l'aire d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est $\int\frac{r^2d\theta}{2}$, on aura celle du quart de la lemniscate dont il s'agit, en prenant l'intégrale $\int\frac{a^2}{2}\text{Cos.}2\theta.d\theta$ depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=45^\circ$; ce qui donne exactement $\frac{a^2}{4}$. Mais si, ne faisant pas attention à ce que la courbe ne s'étend pas au-delà de $\theta=45^\circ$, on cherche l'aire entre l'axe et sa perpendiculaire par le centre de la courbe, c'est-à-dire depuis $\theta=0^\circ$ jusqu'à $\theta=90^\circ$; on pourrait présumer que l'analise avertirait de cette méprise, en donnant un résultat, partie réel et partie imaginaire, dont la partie réelle serait l'aire cherchée du quart de la courbe, tandis que la partie imaginaire répondrait à l'aire comprise dans l'angle demi-droit où la courbe n'existe plus. Mais il n'en est pas ainsi ; car la valeur de l'intégrale, prise depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=90^\circ$, est égale à zéro. Cela montre qu'on doit toujours s'assurer qu'une intégrale est réelle dans toute l'étendue de l'intégration, avant de se fier au résultat que donne l'application des règles ordinaires.

Paris, le 6 mai 1822.