
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Géométrie élémentaire. Sur l'équivalence des tétraèdres
de même base et de même hauteur**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 362-365

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__362_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1821-1822, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur l'équivalence des tétraèdres de même base et de même hauteur ;

Par M. GERGONNE.

IL n'est pas étonnant que , lorsqu'on rencontre en géométrie des incommensurables et des lignes et surfaces courbes dont nous n'avons proprement qu'une idée négative , on soit contraint , pour en démontrer les propriétés , de recourir à la réduction à l'absurde ; mais celui qui étudie la géométrie en philosophe a lieu d'être assez surpris qu'on n'ait d'autre ressource que cette forme de raisonnement , soit pour démontrer l'équivalence des tétraèdres de même base et de même hauteur , soit pour obtenir directement l'expression du volume d'un tétraèdre , sur-tout lorsqu'il voit avec quelle facilité on démontre , dans la géométrie plane , la propriété analogue pour le triangle.

M. Legendre, en suivant le mode de décomposition indiqué par Euclide, est parvenu directement, d'une manière fort élégante, à l'expression du volume du tétraèdre, de laquelle il a pu conclure ensuite que les tétraèdres de même base ou seulement de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalens ; mais comme, dans la géométrie plane, on s'occupe de la comparaison des surfaces avant de chercher à en déterminer l'étendue ; il m'a semblé un peu plus méthodique de suivre une marche analogue dans la géométrie des corps. Voici, en conséquence, de quelle manière je démontre depuis long-temps, dans mes cours, que deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalens.

Soient M , N les deux tétraèdres dont il s'agit. Si l'on nie qu'ils soient équivalens, il faudra nécessairement admettre qu'il y en a un qui est plus grand que l'autre ; supposons donc qu'on admette que ce soit M , de telle sorte qu'on ait

$$M > N, \quad (1)$$

on pourra toujours admettre que, parmi tous les tétraèdres semblables à N et plus grands que lui, il y en a un équivalent à M , soit N' ce tétraèdre, de manière qu'on ait

$$M = N'; \quad (2)$$

N et N' seront donc deux tétraèdres semblables, que l'on pourra faire coïncider par le sommet et les trois arêtes de l'un de angles trièdres de leurs bases, auquel cas, leurs faces opposées à ces angles se trouveront parallèles.

Soit divisée la hauteur de N en un assez grand nombre de parties égales pour qu'en menant, par les points de division, des plans parallèles à la base et construisant, sur les sections résultantes comme bases, une suite de prismes triangulaires circonscrits, à la manière de M. Lacroix, ces prismes soient tous renfermés dans N' , ce qui est toujours possible ; et soit P la somme de ces prismes ; nous aurons donc

$$P < N', \quad (3)$$

Soient circonscrits à M un pareil nombre de prismes triangulaires de même hauteur ; il est aisé de voir que chaque prisme circonscrit à M sera équivalent au prisme de même rang circonscrit à N ; d'où il suit que la somme des prismes circonscrits à M sera équivalente à la somme des prismes circonscrits à N , et pourra comme elle être représentée par P .

Mais, parce qu'ils sont circonscrits à M , on devrait avoir

$$M < P, \quad (4)$$

qui, combinée avec (3), donnerait, à plus forte raison,

$$M < N' \quad (5)$$

ce qui contredit l'hypothèse (2) ; cette hypothèse est donc absurdé ; deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont donc équivalens.

Je n'aurais point parlé de cette démonstration, à laquelle je n'ai jamais songé à attacher aucune sorte d'importance, si je n'avais eu à mentionner une autre démonstration de la même proposition qui m'a été récemment adressée par M. Querret, chef d'institution à Saint-Malo. Voici comment procède M. Querret :

Soit toujours supposé, comme ci-dessus,

$$M > N; \quad (1)$$

leur différence, si petite qu'on la suppose, pourra toujours être considérée comme équivalente à un certain prisme triangulaire ayant même base que M et une hauteur convenable.

Soit divisée la hauteur commune des deux tétraèdres en parties égales plus petites que la hauteur de ce prisme triangulaire ; soient conduits, par les points de division, des plans parallèles aux bases et soient construits entre ces plans des prismes triangulaires circonscrits à M dont nous désignerons la somme par P , et des prismes inscrits à N dont nous désignerons la somme par Q ; nous aurons conséquemment

$$P > M, \quad (2) \qquad Q < N; \quad (3)$$

d'où

$$P-Q > M-N ; \quad (4)$$

or, il est connu que $P-Q$ est équivalent au premier des prismes circonscrits à M , lequel a été pris plus petit que $M-N$; de sorte qu'on devrait avoir, d'un autre côté,

$$P-Q < M-N ; \quad (5)$$

ce qui contredit l'inégalité (4), et prouve ainsi que l'inégalité (1) ne saurait être admise.
