ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution du problème proposé dans la note de la page 231 du I.er volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 317-320
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__317_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème proposé dans la note de la page 231 du I.er volume de ce recueil;

Par un ABONNÉ.

PROBLÈME. *Par deux points donnés, sur un plan, faire passer une courbe telle que la portion de ce plan comprise entre cette courbe, les ordonnées des deux points donnés et l'axe des abscisses, soit équivalente à un quarré donné?*

Solution. Avant de nous occuper de cette question en particulier, occupons-nous d'une question plus générale. Soit V une fonction donnée quelconque de la variable indépendante x, de sa fonction y et des coefficiens différentiels de cette dernière. Supposons que la relation entre x et y ne soit pas déterminée, et proposons-nous de trouver quelle devrait être cette relation, pour que l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$ prise entre deux limites données a et g fût égale à une quantité donnée k^2.

Soit X une fonction de x dont la valeur, prise entre les limites a et g, soit égale à k^2, c'est-à-dire, telle qu'en représentant respectivement par A et G ce qu'elle devient lorsqu'on y fait successivement $x=a$, $x=g$, on ait $A-G=k^2$; en posant

$$V=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,, \qquad (1)$$

on aura

$$\int V\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}X=X+\text{Const.}$$

qui prise, en effet, entre a et g devient égale à k^2, comme l'exige le problème. Or, l'équation (1) est une équation, différentielle ou non, qui établit entre x et y la relation demandée.

Le problème se réduit donc à assigner la forme de la fonction X; or, il est aisé de voir que cette fonction satisfera généralement aux conditions auxquelles elle doit être assujettie, en posant

$$X=\frac{k^2\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,; \tag{2}$$

F désignant une fonction tout-à-fait arbitraire, et même discontinue si l'on veut. On conclut de là, en effet,

$$A=\frac{k^2\mathrm{F}(a)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,,\qquad G=\frac{k^2\mathrm{F}(g)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,,$$

d'où

$$A-G=k^2\,,$$

ainsi qu'il était demandé.

On aura donc ainsi

$$V=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{k^2\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,; \tag{3}$$

F′ désignant, suivant l'usage, la dérivée de F; il ne s'agira donc que d'intégrer cette dernière, si toutefois elle est différentielle, pour obtenir la relation cherchée.

Pour appliquer présentement ces principes à la résolution de la question proposée, soient (a, b), (g, h) les deux points donnés, par lesquels doit passer la courbe cherchée, et soit k^2 le quarré auquel doit être équivalent l'espace compris entre cette courbe, les ordonnées des deux points donnés et l'axe des x. Supposons, en premier lieu, qu'on n'exige pas que la courbe passe par ces deux points, mais seulement qu'elle se termine à leurs ordonnées, considérées comme des droites indéfinies; la question se trouvera donc ainsi réduite à trouver la relation entre x et y qui rend égale à k^2 l'intégrale $\int y\mathrm{d}x$, prise entre les limites a et g; or, on a ici $V=y$; l'équation de la courbe cherchée sera donc, par la formule (3),

$$y=\frac{k^2\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,. \qquad (4)$$

Il ne s'agit plus présentement que de profiter de l'indétermination de la fonction F pour assujettir la courbe à passer par les points (a,b), (g,h). Pour le faire de la manière la plus générale, soit posé

$$\mathrm{F}(x)=M\varphi(x)+N\psi(x)+P\chi(x)\;,$$

M, N et P étant des constantes arbitraires; on aura ainsi

$$\mathrm{F}'(x)=M\varphi'(x)+N\psi'(x)+P\chi'(x)\;,$$

$$\mathrm{F}(a)=M\varphi(a)+N\psi(a)+P\chi(a)\;,$$

$$\mathrm{F}(g)=M\varphi(g)+N\psi(g)+P\chi(g)\;,$$

d'où

$$\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)=M[\varphi(a)-\varphi(g)]+N[\psi(a)-\psi(g)]+P[\chi(a)-\chi(g)]\,;$$

mettant donc toutes ces valeurs dans la formule (4), chassant le dénominateur, transposant et ordonnant par rapport aux constantes, il viendra

$$\left.\begin{aligned}&M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]y-k^2\varphi'(x)\}\\ +&N\{[\psi(a)-\psi(g)]y-k^2\psi'(x)\}\\ +&P\{[\chi(a)-\chi(g)]y-k^2\chi'(x)\}\end{aligned}\right\}=0\,;$$

exprimant ensuite que les coordonnées des deux points $(a\,,\,b)$, $(g\,,\,h)$ satisfont à cette dernière équation, il viendra

$$\left.\begin{array}{r}M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]b-k^2\varphi'(a)\}\\+N\{[\psi(a)-\psi(g)]b-k^2\psi'(a)\}\\+P\{[\chi(a)-\chi(g)]b-k^2\chi'(a)\}\end{array}\right\}=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{r}M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]h-k^2\varphi'(g)\}\\+N\{[\psi(a)-\psi(g)]h-k^2\psi'(g)\}\\+P\{[\chi(a)-\chi(g)]h-k^2\chi'(g)\}\end{array}\right\}=0\,;$$

éliminant donc, entre ces deux dernières et la précédente, deux quelconques des trois constantes M, N, P, la troisième disparaîtra d'elle-même, et il viendra, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$\{(\varphi a-\varphi g)(\psi'a.\chi'g-\psi'g.\chi'a)+(\psi a-\psi g)(\chi'a.\varphi'g-\chi'g.\varphi'a)+(\chi a-\chi g))\varphi'a.\psi'g-\varphi'g.\psi'a)\}y$$

$$=\{k^2(\psi'a.\chi'g-\psi'g.\chi')+(\psi a-\psi g)(h\chi'a-b\chi'ag)+(\chi a-\chi g)(b\psi'g-h\psi'a)\}\varphi'x$$

$$+\{k^2(\chi'a.\varphi'g-\chi'g.\varphi'a)+(\chi a-\chi g)(h\varphi'a-b\varphi'g)+(\varphi a-\varphi g)(b\chi'g-h\chi'a)\}\psi'x$$

$$+\{k^2(\varphi'a.\psi'g-\varphi'g.\psi'a)+(\varphi a-\varphi g)(h\psi'a-b\psi'g)+(\psi a-\psi g)(b\varphi'g-h\varphi'a)\}\chi'x\,;$$

équation qui, aux notations près, est exactement la même que celle de l'endroit cité.